Additionstheoreme Mathieuscher Funktionen

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln

vorgelegt von

Gerhard Wolf

aus Wuppertal-Elberfeld

Köln 1969

Berichterstatter:
Prof. Dr. F. W. Schäfke
Prof. Dr. F. Sauter

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Mai 1969

Inhaltsübersicht

1. Einleitung

Als Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen bezeichnet man eine Formel, die eine in einem elliptischen Koordinatensystem separierte Lösung der ebenen Schwingungsgleichung $\Delta w + k^2 w = 0$ in eine Reihe nach Lösungen entwickelt, die in einem anderen elliptischen Koordinatensystem separiert sind. Physikalisch bedeutet dies, daß wir elliptische Zylinderwellen einer Achse darstellen als Überlagerung von elliptischen Zylinderwellen einer anderen zur ersten parallelen Zylinderachse.

Die bekannten Additionstheoreme der Mathieuschen Funktionen ([1],[2] und [5],[6]) sind von folgender Art:

Betrachten wir zwei elliptische Koordinatensysteme, deren Zusammenhang durch

$$(1.1) \qquad c_o \cosh(z_o \pm i t_o) = e^{\pm i\alpha} c \cosh(z \pm i t) + \varrho e^{\pm i\psi}$$

(jeweils oberes bzw. unteres Vorzeichen)

mit den komplexen Parametern $c_o(\neq 0)$, $c(\neq 0)$, $\varrho(\neq 0)$, α und ψ beschrieben werde, dann ist (1.1) eine Beziehung zwischen (z,t) und (z_o,t_o) im zweidimensionalen komplexen Raum $\mathbb{C}^2$.

Mit der Bezeichnung

$$e^{i\alpha} c \cosh \zeta_1 = -\varrho e^{i\psi} + c_o$$
$$e^{i\alpha} c \cosh \zeta_2 = -\varrho e^{i\psi} - c_o$$
$$e^{-i\alpha} c \cosh \zeta_3 = -\varrho e^{-i\psi} + c_o$$
$$e^{-i\alpha} c \cosh \zeta_4 = -\varrho e^{-i\psi} - c_o$$

und

$$A^+ = \max(|\mathrm{Re}\,\zeta_1|, |\mathrm{Re}\,\zeta_2|), \quad A^- = \max(|\mathrm{Re}\,\zeta_3|, |\mathrm{Re}\,\zeta_4|)$$
$$B^+ = \min(|\mathrm{Re}\,\zeta_1|, |\mathrm{Re}\,\zeta_2|), \quad B^- = \min(|\mathrm{Re}\,\zeta_3|, |\mathrm{Re}\,\zeta_4|)$$

lassen sich in den Bereichen

$$\mathfrak{B}_a = \{(z,t) \mid \mathrm{Re}\,z - \mathrm{Im}\,t > A^+ , \ \mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,t > A^- \}$$

bzw.

$$\mathfrak{B}_i = \{(z,t) \mid |\mathrm{Re}\,z - \mathrm{Im}\,t| < B^+ , \ |\mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,t| < B^- \}$$

$z_o = z_o(z,t)$ und $t_o = t_o(z,t)$ als holomorphe und bzgl. $z_o \pm i t_o$ mod $2\pi i$ eindeutig bestimmte Lösungsfunktionen von (1.1) mit $\mathrm{Re}(z_o \pm i t_o) > 0$ erklären. Dann gilt in $\mathfrak{B}_a$ das Additionstheorem, falls h^2 normaler Wert zu ν und $\nu+1$ ist:

$$(1.2) \quad M_\nu^{(j)}(z_o(z,t);h_o)\, me_\nu(t_o(z,t);h_o^2) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_s M_{\nu+s}^{(j)}(z;h)\, me_{\nu+s}(t;h^2)$$ 1)

$$\left(j = 1,2,3,4 \; ; \; h = \tfrac{1}{2} kc \; , \; h_o = \tfrac{1}{2} kc_o \right)$$

mit den Koeffizienten

$$A_s = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \Big\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{2p}(h_o^2)\, c_{2p-2l}^{\nu+s}(h^2)\, e^{i(\nu+s+2p-2l)\alpha} \Big\} J_{2l-s}(k\varrho)\, e^{i(2l-s)\psi} .$$

Diese Entwicklung hat F.W.SCHÄFKE in [2] für den maximalen Konvergenzbereich $\mathfrak{B}_a$ bewiesen.

---

1) Im Falle ganzer ν und $A^+ \neq A^-$ müssen in der Reihe die Glieder mit den Indizes $\nu+s$ und $-\nu-s$ zusammengefaßt werden.

Entsprechend hat man für zu 0 und 1 normale Werte h^2 mit der Voraussetzung

$$|\varrho|\, e^{\mp \Im m \psi} > |c_0| + |c|\, e^{\mp \Im m \alpha}$$

in $\mathcal{L}_i$ das Theorem

$$\begin{aligned} M_\nu^{(j)}(z_0(z,t);h_0)\, me_\nu(t_0(z,t);h_0^2) &= B_0^{(j)}\, M_0^{(1)}(z;h)\, me_0(t;h^2) + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ B_s^{(j)}\, M_s^{(1)}(z;h)\, me_s(t;h^2) + B_{-s}^{(j)}\, M_{-s}^{(1)}(z;h)\, me_{-s}(t;h^2) \right\} \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\left(j = 1,2,3,4 \;;\; h = \tfrac{1}{2}\, kc \;,\; h_0 = \tfrac{1}{2}\, kc_0 \right)$$ 1)

mit

$$B_s^{(j)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{2p}^{\nu}(h_0^2)\, c_{2p-2l}^{s}(h^2)\, e^{i(s+2p-2l)\alpha} \right\} \mathcal{Z}_{\nu+2l-s}^{(j)}(k\varrho)\, e^{i(\nu+2l-s)\psi}.$$

Einen Spezialfall der Formel (1.3) hat K.SAERMARK ([5]) gefunden, indem er die bekannten Entwicklungen von Mathieuschen Funktionen nach Zylinderfunktionen und von Zylinderfunktionen nach Mathieuschen Funktionen, sowie das Additionstheorem für Zylinderfunktionen benutzt und diese Reihen für ganze Indizes und reelle Parameter ineinander einsetzt. Für dieses so gefundene Additionstheorem ist der in [5] angegebene Konvergenzbereich falsch. (1.3) mit dem maximalen Gültigkeitsbereich $\mathcal{L}_i$ wurde in [6] gezeigt.

Das Additionstheorem (1.2) gilt also in einem Gebiet außerhalb der Zentren beider Koordinatensysteme und (1.3)

---

1) Für $B^+ = B^-$ kann die Summe in (1.3) als $\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty}$ geschrieben werden.

in einem Bereich, der das Zentrum mit der Exzentrizität c umfaßt. Die Darstellung der Verschiebung der beiden Systeme in der Transformationsgleichung (1.1) durch $\varrho e^{\pm i\psi}$ bewirkt die Entwicklung der Koeffizienten A_s und $B_s^{(j)}$ nach Zylinderfunktionen. Wir setzen nun dafür einen Ausdruck der Form $e^{\pm i\beta}\gamma \cosh(\varsigma \pm i\tau)$, so daß wir A_s und $B_s^{(j)}$ ebenfalls als Reihe nach Mathieuschen Funktionen dargestellt bekommen. Es erweist sich dann wegen der symmetrischen Form der Transformationsgleichung, daß die Reihen für Außen- und Innenbereich durch Umordnung auseinander hervorgehen. Die Additionstheoreme (1.2) und (1.3) sind dann Spezialfälle dieser Formeln.

Für die folgenden Überlegungen gehen wir von der Transformationsgleichung

$$c_0 \cosh(z_0 \pm i t_0) = e^{\pm i\alpha} c \cosh(z \pm i t) + e^{\pm i\beta} \gamma \cosh(\varsigma \pm i\tau) \tag{1.4}$$

aus, deren holomorphe Lösungen z_0 und t_0 in Abschnitt 3 untersucht werden. Mit den Integralrelationen von Abschnitt 4 und dem Entwicklungssatz von Abschnitt 2 haben wir dann alle Hilfsmittel bereitgestellt, die zu den Additionstheoremen in Abschnitt 5 benötigt werden. Abschnitt 6 bringt noch einige spezielle aus den Additionstheoremen fließende Entwicklungen.

2. Grundlagen

Ein Entwicklungssatz nach Produkten Mathieuscher Funktionen

Eine Darstellung der Theorie der Mathieuschen Funktionen mit der dazu notwendigen Theorie bestimmter Eigenwertprobleme mit zwei Parametern findet sich bei J. MEIXNER und F. W. SCHÄFKE in [1] und bei F.W. SCHÄFKE in [4]I . Hier vermerken wir nur, daß die Funktionen $M_\nu^{(j)}$ der modifizierten Mathieuschen Differentialgleichung

$$-Y''(z) + (\lambda - 2h^2\cosh 2z)\,Y(z) = 0$$

für $\lambda = \lambda_\nu(h^2)$ genügen, wobei $M_\nu^{(j)}$ ferner die Integralrelation

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{Z}_{\nu+2s}^{(j)}(kR)\, e^{-i(\nu+2s)\varphi}\, me_\nu(t;h^2)\,dt = (-1)^s c_{2s}^{\nu}(h^2)\, M_\nu^{(j)}(z;h)$$

$$R\, e^{\pm i\varphi} = c\cosh(z\pm it)\;,\quad \Re z > 0\;,\quad t \text{ reell}$$

erfüllt und für $j=3,4$ das asymptotische Verhalten

$$M_\nu^{(j)}(z;h) = \mathcal{Z}_\nu^{(j)}(2h\cosh z)\cdot\left(1 + O\left(\frac{1}{\cosh z}\right)\right)$$

$$\Re z \longrightarrow \infty \quad , \quad |\Im z| \leqq \text{const.}$$

besitzt ([1],S.165f.). Die Funktionen $\mathcal{Z}^{(j)}$ für $j=1,2,3,4$ sind der Reihe nach die Besselsche, die Neumannsche, die erste und zweite Hankelsche Funktion. Dabei sind mit $me_{\nu+s}(t;h^2)$ (s ganz) die biorthonormierten Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung

$$y''(t) + (\lambda - 2h^2\cos 2t)\,y(t) = 0$$

zum charakteristischen Exponenten $\nu+s$ $(\lambda = \lambda_{\nu+s}(h^2))$

für normale Werte h^2 bezeichnet. Die Konstanten $c_{2n}^{\nu+s}(h^2)$ liefert die Fourier-Reihe

$$me_{\nu+s}(t;h^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}^{\nu+s}(h^2)\, e^{i(\nu+s+2n)t} \quad .$$

Als Ergänzung zu den Entwicklungen nach Mathieuschen Funktionen ([1],S.127) geben wir einen Satz über Reihen nach Produkten Mathieuscher Funktionen.

<u>Satz 1:</u>

γ_1 und γ_2 seien zwei zur reellen Achse parallele Streifen und $f\colon \gamma_1\times\gamma_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\exists\, \nu\in\mathbb{C}\quad f(z+2\pi,t) = e^{2\pi i\nu} f(z,t) \qquad (z,t)\in\gamma_1\times\gamma_2 \quad\text{und}$$

$$\exists\, \mu\in\mathbb{C}\quad f(z,t+2\pi) = e^{2\pi i\mu} f(z,t) \qquad (z,t)\in\gamma_1\times\gamma_2 \;.$$

Dann gilt für zu ν und $\nu+1$ normale Werte h^2 und zu μ und $\mu+1$ normale $\hat{h}^2$ die in kompakten Teilmengen von $\gamma_1\times\gamma_2$ absolut gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$f(z,t) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} a_{mn}\, me_{\nu+m}(z;h^2)\, me_{\mu+n}(t;\hat{h}^2)$$

mit

$$a_{mn} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{t_0}^{t_0+2\pi}\int_{z_0}^{z_0+2\pi} f(z,t)\, me_{\nu+m}(-z;h^2)\, me_{\mu+n}(-t;\hat{h}^2)\,dz\,dt$$

$$(z_0,t_0)\in\gamma_1\times\gamma_2 \quad .$$

Im Falle ganzer ν (bzw. μ) müssen die Terme mit den Indizes $\nu+m$ und $-\nu-m$ (bzw. $\mu+n$ und $-\mu-n$) zu einem Reihenglied zusammengefaßt werden, falls γ_1 (bzw. γ_2) nicht symmetrisch zur reellen Achse ist. (Vergleiche mit (1.3).)

<u>Beweis:</u> Die Funktion f kann für jedes z als Funktion von t in $\mathfrak{T}_2$ entwickelt werden ([1],S.127)

$$f(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z)\ me_{\mu+n}(t;\hat{h}^2)$$

mit

$$b_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(z,t)\ me_{\mu+n}(-t;\hat{h}^2)\,dt \qquad (t_0 \in \mathfrak{T}_2).$$

Dann liefert die Entwicklung der in $\mathfrak{T}_1$ holomorphen Funktionen $b_n(z)$ mit $b_n(z+2\pi) = e^{2\pi i\nu}\, b_n(z)$

$$f(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{mn} me_{\nu+m}(z;h^2)\right\} me_{\mu+n}(t;\hat{h}^2) \quad .$$

Der Vergleich mit der in kompakten Teilmengen von $\mathfrak{T}_1 x \mathfrak{T}_2$ absolut gleichmäßig konvergenten Fourier-Reihe

$$f(z,t) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} b_{mn} e^{i(\nu+m)z}\, e^{i(\mu+n)t}$$

mit

$$b_{mn} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{t_0}^{t_0+2\pi}\int_{z_0}^{z_0+2\pi} f(z,t)\, e^{-i(\nu+m)z}\, e^{-i(\mu+n)t} dz\,dt \qquad (z_0,t_0) \in \mathfrak{T}_1 x \mathfrak{T}_2$$

ergibt zusammen mit dem asymptotischen Verhalten der Mathieuschen Funktionen für nicht ganzes ν ([1],S.125)

$$me_{\nu+m}(z;h^2) = e^{i(\nu+m)z}\ (\ 1 + O(\tfrac{1}{m})\ ) \qquad (m \longrightarrow \pm\infty)$$

– $O(\frac{1}{m})$ bedeutet in zur reellen Achse parallelen Streifen von $\mathbb{C}$ gleichmäßig – zunächst

$$a_{mn} = b_{mn}\ (\ 1 + O(\tfrac{1}{n})\ )\ (\ 1 + O(\tfrac{1}{m})\ ) \qquad (m,n \longrightarrow \pm\infty)\ .$$

Weiter erhalten wir für

$$\Im m\, z_1 < r_1 \leq \Im m\, z \leq r_2 < \Im m\, z_2 \qquad (z_1, z_2 \in \mathfrak{T}_1) \quad \text{und}$$

$$\Im m\, t_1 < \varrho_1 \leq \Im m\, t \leq \varrho_2 < \Im m\, t_2 \qquad (t_1, t_2 \in \mathfrak{T}_2)$$

die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} |b_{mn}|\ |e^{i(\nu+m)z_k}|\ |e^{i(\mu+n)t_l}| \qquad (k,l=1,2)$$

und damit die absolut gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} a_{mn} me_{\nu+m}(z;h^2)\ me_{\mu+m}(t;\hat{h}^2)$$

in den obigen Streifen, weil z.B. für $n,m \geq 0$

$$|a_{mn} e^{-i\nu z} me_{\nu+m}(z;h^2)\ e^{-i\mu t}\ me_{\mu+n}(t;\hat{h}^2)| \leq$$

$$\leq |b_{mn}|\, e^{-m\Im m z_1}\, e^{-n\Im m t_1}\,(\ 1 + O(\tfrac{1}{n})\,)(\ 1 + O(\tfrac{1}{m})\,)\left(\frac{e^{\Im m z_1}}{e^{r_1}}\right)^m\left(\frac{e^{\Im m t_1}}{e^{\varrho_1}}\right)^n$$

$$\leq M\ (e^{\Im m z_1 - r_1})^m (e^{\Im m t_1 - \varrho_1})^n$$

abgeschätzt werden kann.

Der Fall ganzer ν (bzw. μ) kann mit entsprechenden Überlegungen für die zusammengefaßten Reihenglieder bewiesen werden ([1],S.125f.).

3. Hilfssätze zur Transformationsgleichung

Für komplexe Parameter $c(\neq 0)$, $c_0(\neq 0)$, $\gamma(\neq 0)$, α, β , ς und τ betrachten wir die Transformationsgleichung

$$(3.1)\qquad c_0\cosh(z_0\pm it_0) = e^{\pm i\alpha} c\cosh(z\pm it) + e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\varsigma\pm i\tau)$$

zweier elliptischer Koordinatensysteme im $\mathbb{C}^2$ und suchen nach Lösungen $z_0(z,t)$, $t_0(z,t)$, die in Gebieten der Form $|\mathrm{Re}\,(z\pm it)| \underset{(>)}{<}$ const. holomorph sind. Zugleich untersuchen wir das Verhalten der auf elliptische Koordinaten transformierten Schwingungsgleichung $\Delta w + k^2 w = 0$ mit komplexem k bei dieser Transformation.

Wie in Abschnitt 1 bezeichnen wir für das folgende:

$$(3.2)\quad \begin{cases} A^+ = \max(\mathrm{Re}\,\varsigma_1, \mathrm{Re}\,\varsigma_2) \\ A^- = \max(\mathrm{Re}\,\varsigma_3, \mathrm{Re}\,\varsigma_4) \\ \mathcal{L}_a = \{(z,t) \mid \mathrm{Re}\,z - \mathrm{Im}\,t > A^+ ,\ \mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,t > A^-\} \end{cases}$$

und

$$(3.2)\quad \begin{cases} B^+ = \min(\mathrm{Re}\,\varsigma_1, \mathrm{Re}\,\varsigma_2) \\ B^- = \min(\mathrm{Re}\,\varsigma_3, \mathrm{Re}\,\varsigma_4) \\ \mathcal{L}_i = \{(z,t) \mid |\mathrm{Re}\,z - \mathrm{Im}\,t| < B^+ ,\ |\mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,t| < B^-\} \end{cases},$$

wobei die $\varsigma_\varkappa$ mit $\mathrm{Re}\,\varsigma_\varkappa \geqq 0$ $(\varkappa=1,2,3,4)$ durch

$$e^{i\alpha}c\cosh\varsigma_1 = c_0 - e^{i\beta}\gamma\cosh(\varsigma+i\tau)$$

$$e^{i\alpha}c\cosh\varsigma_2 = -c_0 - e^{i\beta}\gamma\cosh(\varsigma+i\tau)$$

$$e^{-i\alpha}c\cosh\varsigma_3 = c_0 - e^{-i\beta}\gamma\cosh(\varsigma-i\tau)$$

$$e^{-i\alpha}c\cosh\varsigma_4 = -c_0 - e^{-i\beta}\gamma\cosh(\varsigma-i\tau)$$

definiert sind. Da die $\varsigma_\varkappa$-Werte mod $2\pi i$, also im Realteil

eindeutig bestimmt sind, so sind auch alle aus $\mathrm{Re}\,\varsigma_\varkappa$ resultierenden Größen eindeutig.

Hilfssatz 1:

a) Es gibt zwei in $\mathcal{L}_a$ holomorphe Lösungsfunktionen $z_0(z,t)$ und $t_0(z,t)$ von

$$(3.1)\qquad c_0\cosh(z_0\pm it_0) = e^{\pm i\alpha} c\cosh(z\pm it) + e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\varsigma\pm i\tau)$$

mit $\mathrm{Re}(z_0(z,t) \pm it_0(z,t)) > 0$ und

$$(3.3)\quad \begin{cases} z_0(z,t+2\pi) = z_0(z,t) \\ t_0(z,t+2\pi) = t_0(z,t) + 2\pi \\ z_0(z+2\pi i,t) = z_0(z,t) + 2\pi i \\ t_0(z+2\pi i,t) = t_0(z,t) \end{cases}.$$

Zu allen möglichen in $\mathcal{L}_a$ holomorphen Lösungen $z_0^*(z,t)$ und $t_0^*(z,t)$ von (3.1) mit $\mathrm{Re}(z_0^*(z,t) \pm it_0^*(z,t)) > 0$ existieren ganze Zahlen l und m mit

$$z_0^*(z,t) = z_0(z,t) + i(l+m)\pi$$
$$t_0^*(z,t) = t_0(z,t) + (l-m)\pi \quad .$$

b) Vor.: Es sei mit der Bezeichnung

$$C^+ = \min_{\sigma\in[-1,1]}\{\mathrm{Re}\,\omega(\sigma) \mid e^{i\alpha}c\cosh\omega(\sigma) = c_0\sigma - e^{i\beta}\gamma\cosh(\varsigma+i\tau);\ \mathrm{Re}\,\omega(\sigma) \geqq 0\}$$

$$C^- = \min_{\sigma\in[-1,1]}\{\mathrm{Re}\,\omega(\sigma) \mid e^{-i\alpha}c\cosh\omega(\sigma) = c_0\sigma - e^{-i\beta}\gamma\cosh(\varsigma-i\tau);\ \mathrm{Re}\,\omega(\sigma) \geqq 0\}$$

$C^+ > 0$ und $C^- > 0$ $(\sim B^+ \geqq C^+ \wedge B^- \geqq C^-)$.

<u>Beh.:</u> Von

(3.1) $c_0 \cosh(z_0 \pm it_0) = e^{\pm i\alpha} c \cosh(z \pm it) + e^{\pm i\beta} \gamma \cosh(\varsigma \pm i\tau)$

existieren zwei in $\mathcal{L}_i$ holomorphe Lösungen $z_0 = \hat{z}_0$ und $t_0 = \hat{t}_0$ mit $\mathrm{Re}(\hat{z}_0(0,0) \pm i\hat{t}_0(0,0)) > 0$ und

$$(3.4)\quad \begin{cases} \hat{z}_0(z,t+2\pi) = \hat{z}_0(z,t) \\ \hat{t}_0(z,t+2\pi) = \hat{t}_0(z,t) \\ \hat{z}_0(z+2\pi i,t) = \hat{z}_0(z,t) \\ \hat{t}_0(z+2\pi i,t) = \hat{t}_0(z,t) \end{cases} .$$

$\hat{z}_0$ und $\hat{t}_0$ sind bzgl. $\hat{z}_0(z,t) \pm i\hat{t}_0(z,t)$ mod $2\pi i$ eindeutig bestimmt.

c) Ist $v(z_0,t_0)$ eine in (z_0,t_0) ganze holomorphe Lösung von

$$(3.5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial z_0^2} + 2h_0^2 \cosh 2z_0 \cdot v = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial t_0^2} + 2h_0^2 \cos 2t_0 \cdot v \\ \text{mit} \quad h_0 = \frac{1}{2} k c_0 \end{cases} ,$$

dann erfüllen die in $\mathcal{L}_a$ bzw. $\mathcal{L}_i$ holomorphen Funktionen $u_a(z,t) = v(z_0(z,t), t_0(z,t))$ und $u_i(z,t) = v(\hat{z}_0(z,t), \hat{t}_0(z,t))$

$$(3.6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2h^2 \cosh 2z \cdot u = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h^2 \cos 2t \cdot u \\ \text{mit} \quad h = \frac{1}{2} k c \end{cases} .$$

<u>Beweis:</u>

Zum Beweise von a) benötigen wir die bekannte Aussage, daß die Umkehrung der $2\pi i$-periodischen Funktion

$y(x) = \cosh x$ für $\mathrm{Re}\, x > 0$

auf $\{y \mid y \in \mathbb{C} - [-1,1]\}$ durch eine auf der Riemannschen Fläche von $\arg y$ holomorphen Funktion

$g(y)$ mit $\mathrm{Re}\, g(y) > 0$ und

$g(ye^{2\pi i}) = g(y) + 2\pi i$ gegeben ist. Entsprechend liefert

die Auflösung von

$$f_1(\lambda) = \cosh f(\lambda)$$

mit einer Funktion f_1, deren Wertebereich in $\mathbb{C} - [-1,1]$ liegt und die

$$f_1(\lambda + 2\pi i) = f_1(\lambda)\, e^{2\pi i}$$

erfüllt, die Funktion $f(\lambda) = g \circ f_1(\lambda)$, die dann wegen

$$f(\lambda + 2\pi i) = g \circ f_1(\lambda + 2\pi i) = g(f_1(\lambda)\, e^{2\pi i}) = g(f_1(\lambda)) + 2\pi i = f(\lambda) + 2\pi i$$

sogar eindeutig holomorph mit $\mathrm{Re}\, f(\lambda) > 0$ ist.

Die letzte Aussage wenden wir auf

$$f_1^{\pm}(\lambda) = \frac{1}{c_0}\left(e^{\pm i\alpha} c \cosh \lambda + e^{\pm i\beta} \gamma \cosh(\varsigma \pm i\tau) \right)$$

in $\mathfrak{F}^{\pm} = \{\lambda \mid \mathrm{Re}\,\lambda > A^{\pm}\}$ an. Bilden wir mit den Funktionen $f^{\pm}$ aus $f_1^{\pm}(\lambda) = \cosh f^{\pm}(\lambda)$ in $\mathcal{L}_a$

$$z_0(z,t) = \frac{1}{2}\left(f^{+}(z+it) + f^{-}(z-it) \right)$$

$$t_0(z,t) = \frac{1}{2i}\left(f^{+}(z+it) - f^{-}(z-it) \right) ,$$

so erfüllen diese die Behauptung von a) bis auf die letzte Aussage. Diese kann sofort aus (3.1) für z_0, t_0 bzw. z_0^*, t_0^* und damit aus

$$\cosh(z_0^* \pm it_0^*) = \cosh(z_0 \pm it_0) ,$$

$$\mathrm{Re}(z_0 \pm it_0) > 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}(z_0^* \pm it_0^*) > 0$$

gewonnen werden.

b) Das Bild $\mathfrak{U}$ von $\mathcal{G}^+=\{\lambda \mid |\mathrm{Re}\,\lambda|<B^+\}$ mittels der $2\pi i$-periodischen holomorphen Funktion

$$g_1^+(\lambda) = \frac{1}{c_0}\left(e^{i\alpha} c\cosh\lambda + e^{i\beta}\gamma\cosh(\varsigma+i\tau)\right)$$

($\mathfrak{U}= g_1^+(\mathcal{G}^+)$) stellt das Innere einer Ellipse dar, die nach Definition von B^+ die Punkte -1 und 1 nicht enthält.

Ist nun $B^+ = C^+$, dann gilt $[-1,1]\cap\mathfrak{U} = \emptyset$ und wegen der Konvexität von $\mathfrak{U}$ existiert eine reelle Zahl χ mit

$$\forall \xi\in\mathfrak{U}:\ |\arg\xi + \chi| < \frac{\pi}{2} \quad .$$

Deshalb läßt sich ein eindeutiger Zweig arcosh_1 der analytischen Funktion arcosh so wählen, daß

$$\operatorname{arcosh}_1 : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorph ist und positiven Realteil besitzt.

Ist dagegen $B^+ \neq C^+$ (d.h. $B^+ > C^+$), dann hat man nach Definition von C^+

$$(-1,1)\cap\mathfrak{U} \neq \emptyset\ ,\ \{-1,1\}\cap\mathfrak{U} = \emptyset$$

und wegen der Konvexität von $\mathfrak{U}$

$$(-\infty,-1]\cap\mathfrak{U} = [1,\infty)\cap\mathfrak{U} = \emptyset \quad .$$

Mit der Bemerkung, daß die durch $y = \cosh x$ gegebene Abbildung auf dem Bild $\mathbb{C} - (-\infty,-1] - [1,\infty)$ von $\mathcal{T}_\pi = \{x \mid 0<\mathrm{Im}\,x<\pi\}$ bzw. $\mathcal{T}_{2\pi} = \{x \mid \pi<\mathrm{Im}\,x<2\pi\}$ bijektiv und in beiden Richtungen holomorph ist, wobei für

$x\in\mathcal{T}_\pi$: $\mathrm{Re}\,x>0$ (bzw. <0) $\longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}\,y>0$ (bzw. <0) und für
$x\in\mathcal{T}_{2\pi}$: $\mathrm{Re}\,x>0$ (bzw. <0) $\longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}\,y<0$ (bzw. >0)

erfüllt ist, erhalten wir eine auf $\mathfrak{U}$ holomorphe Umkehrfunktion arcosh_2 von $\cosh|_{\mathcal{T}_\pi}$ (oder von $\cosh|_{\mathcal{T}_{2\pi}}$,

je nachdem welches Vorzeichen $\mathrm{Im}\,g_1^+(0)$ hat,) mit $\mathrm{Re}(\operatorname{arcosh}_2 g_1^+(0))>0$. Denn wegen $C^+>0$ ist $g_1^+(0)\in\mathfrak{U}-(-1,1)$ – sonst wäre für ein $\sigma\in(-1,1)$

$$c_0\sigma = e^{i\alpha}c + e^{i\beta}\gamma\cosh(\varsigma+i\tau)\ ,$$

also $C^+ = 0$ – und damit $\mathrm{Im}\,g_1^+(0) \neq 0$.

Dann erfüllt in beiden Fällen die auf $\mathcal{G}^+$ holomorphe und $2\pi i$-periodische Funktion

$$g^+(\lambda) = \operatorname{arcosh}_1(g_1^+(\lambda)) \quad \text{bzw.} \quad g^+(\lambda) = \operatorname{arcosh}_2(g_1^+(\lambda))$$

$\mathrm{Re}\,g^+(0)>0$ und

$$c_0\cosh g^+(\lambda) = e^{i\alpha} c\cosh\lambda + e^{i\beta}\gamma\cosh(\varsigma+i\tau) \quad .$$

Genauso erhält man eine in $\mathcal{G}^- = \{\lambda \mid |\mathrm{Re}\,\lambda|<B^-\}$ $2\pi i$-periodische und holomorphe Funktion g^- mit $\mathrm{Re}\,g^-(0)>0$ und

$$c_0\cosh g^-(\lambda) = e^{-i\alpha} c\cosh\lambda + e^{-i\beta}\gamma\cosh(\varsigma-i\tau).$$

Dann erfüllen die Funktionen

$$\hat{z}_0(z,t) = \frac{1}{2}\left(g^+(z+it) + g^-(z-it)\right)$$
$$\hat{t}_0(z,t) = \frac{1}{2i}\left(g^+(z+it) - g^-(z-it)\right)$$

in $\mathcal{L}_i$ die Behauptungen von b) .

Weiter erkennen wir durch Einschränkung von $g^\pm$ auf

$$\mathcal{G}_0^\pm = \{\lambda \mid 0<\mathrm{Re}\,\lambda<B^\pm\ ,\ 0<\mathrm{Im}\,\lambda<2\pi\}\ ,$$

daß die Abbildung F : $F(z,t) = (\hat{z}_0(z,t),\hat{t}_0(z,t))$ auf

$$\mathcal{L}_{i0} = \{(z,t) \mid 0<\mathrm{Re}\,z \mp \mathrm{Im}\,t<B^\pm\ ,\ 0<\mathrm{Im}\,z \pm \mathrm{Re}\,t<2\pi\} \subset \mathcal{L}_i$$

bijektiv und in beiden Richtungen holomorph ist.

c) Mit a) und b) hat man sofort die Holomorphie von u_a in $\mathcal{L}_a$ und von u_i in $\mathcal{L}_i$. Wir zeigen die Transformationsaussage über die Differentialgleichungen (3.5) und (3.6) nur für u_i, da man sie für u_a in entspechender Weise gewinnt. Dabei beschränken wir uns zunächst auf das Gebiet $\mathcal{L}_{io}$, auf dem F bijektiv ist.

Wir erhalten – die Rechnung verläuft für komplexe Parameter genauso wie für reelle, wo sie bekannt ist ([1],S.14) – aus

$$c_o \cosh(z_o \pm i t_o) = e^{\pm i\alpha} c \cosh(z \pm it) + e^{\pm i\beta} \gamma \cosh(\zeta \pm i\tau) ,$$

falls wir zunächst

$$x_1 \pm i x_2 = c_o \cosh(z_o \pm i t_o) , \quad w_1(x_1,x_2) = v(z_o,t_o) , \quad (z_o,t_o) \in F(\mathcal{L}_{io})$$

setzen, die Äquivalenz

$$(3.5) \quad \longleftrightarrow \quad (*) \quad w_{1\,x_1x_1} + w_{1\,x_2x_2} + k^2 w_1 = 0 \quad .$$

Mit

$$e^{\pm i\alpha}(\xi_1 \pm i\xi_2) = - e^{\pm i\beta} \gamma \cosh(\zeta \pm i\tau) + (x_1 \pm i x_2)$$

und

$$w_2(\xi_1,\xi_2) = w_1(x_1,x_2)$$

erhält man aus der Orthogonalinvarianz der Schwingungsgleichung ([3],S.13) die Umrechnung von (*) in

$$(**) \quad w_{2\,\xi_1\xi_1} + w_{2\,\xi_2\xi_2} + k^2 w_2 = 0 \quad .$$

Die Äquivalenz von (**) und (3.6) folgt aus

$$\xi_1 \pm i\xi_2 = c \cosh(z \pm it) , \quad u_i(z,t) = w_2(\xi_1,\xi_2) , \quad (z,t) \in \mathcal{L}_{io}.$$

Damit gilt (3.6) für die Einschränkung von u_i auf $\mathcal{L}_{io}$. Da u_i auf $\mathcal{L}_i$ schon als holomorph erkannt war, so gilt nach dem Identitätssatz die Differentialgleichung auch auf $\mathcal{L}_i$.

<u>Bemerkung:</u>

Die die Holomorphiebereiche $\mathcal{L}_a$ bzw. $\mathcal{L}_i$ von z_o, t_o bzw. $\hat{z}_o, \hat{t}_o$ festlegenden Konstanten A^+, A^- bzw. B^+, B^- sind optimal.

Dazu ist im obigen Beweise nur zu beachten, daß z.B. wegen $\{-1,1\} \cap f_1^+(\{\lambda \mid |\mathrm{Re}\,\lambda| = A^+\}) \neq \emptyset$ $\cosh f^+(\lambda) = f_1^+(\lambda)$ in keinem größeren Bereich holomorph aufgelöst werden kann, da -1 und 1 Verzweigungsstellen der analytischen Funktion arcosh sind. –

Zur Auswertung der Entwicklungskoeffizienten beim "Innenraumadditionstheorem" ist es unerläßlich, in der Transformationsgleichung (3.1) zusätzlich noch die Abhängigkeit von (ζ,τ) in Betracht zu ziehen. Um dabei "Umlaufseigenschaften" ausnutzen zu können, werden in natürlicher Weise geometrische Bedingungen an die Lage der elliptischen Koordinatensysteme zu stellen sein.

Dazu benötigen wir einige Definitionen und Erläuterungen:

Zu $\delta > 0$ sei $\mathcal{L}_\delta = \{ (z,t) \mid |\mathrm{Re}(z \pm it)| < \delta \}$

und damit

$$\vartheta = \Big\{ (\hat{\zeta},\hat{\tau}) \;\Big|\; \mathrm{Re}(\hat{\zeta} \pm i\hat{\tau}) > 0 , \;\; \min_{\varphi \in [0,2\pi]} \Big\{ \inf_{(z,t) \in \mathcal{L}_\delta} |e^{\pm i\beta} \gamma \cosh(\hat{\zeta} \pm i\hat{\tau} + i\varphi) - e^{\pm i\alpha} c \cosh(z \pm it)| \Big\} > |c_o| \Big\} .$$

Dann ist ϑ von der Form

$$\vartheta = \{ (\hat{\zeta},\hat{\tau}) \mid \mathrm{Re}(\hat{\zeta} \pm i\hat{\tau}) > D^\pm \} \quad .$$

Dazu zeigen wir, daß mit $(\hat{\zeta}_o,\hat{\tau}_o) \in \vartheta$ $\{ (\hat{\zeta},\hat{\tau}) \mid \mathrm{Re}(\hat{\zeta} \pm i\hat{\tau}) \geq \mathrm{Re}(\hat{\zeta}_o \pm i\hat{\tau}_o) \}$ in ϑ liegt.

Zu $(\hat{\xi},\hat{\tau})$ mit $\mathrm{Re}(\hat{\xi}+i\hat{\tau}) \geq \mathrm{Re}(\hat{\xi}_o+i\hat{\tau}_o)$ existiert $(z^+,t^+) \in \partial\mathcal{B}_\delta$ $(= \overline{\mathcal{B}}_\delta - \mathcal{B}_\delta)$ mit

$$|e^{i\beta}\gamma\cosh(\hat{\xi}+i\hat{\tau}) - e^{i\alpha}c\cosh(z^++it^+)| =$$

$$= \inf_{(z,t)\in\mathcal{B}_\delta} |e^{i\beta}\gamma\cosh(\hat{\xi}+i\hat{\tau}) - e^{i\alpha}c\cosh(z+it)| \quad .$$

Die Strecke $\overline{e^{i\beta}\gamma\cosh(\hat{\xi}+i\hat{\tau}),\ e^{i\alpha}c\cosh(z^++it^+)}$ schneide die Ellipse $\{e^{i\beta}\gamma\cosh(\hat{\xi}_o+i\hat{\tau}_o+i\varphi) \mid \varphi\in[0,2\pi]\}$ in $e^{i\beta}\gamma\cosh(\hat{\xi}_o + i\hat{\tau}_o + i\varphi_o^+)$ $\quad (\varphi_o^+ \in[0,2\pi])$.

Dann gilt:

$$|e^{i\beta}\gamma\cosh(\hat{\xi}+i\hat{\tau}) - e^{i\alpha}c\cosh(z^++it^+)| =$$

$$= |e^{i\beta}\gamma\cosh(\hat{\xi}+i\hat{\tau}) - e^{i\beta}\gamma\cosh(\hat{\xi}_o+i\hat{\tau}_o+i\varphi_o^+)| +$$

$$+ |e^{i\beta}\gamma\cosh(\hat{\xi}_o+i\hat{\tau}_o+i\varphi_o^+) - e^{i\alpha}c\cosh(z^++it^+)|$$

$$\geq \min_{\varphi\in[0,2\pi]}\left\{\inf_{(z,t)\in\mathcal{B}_\delta} |e^{i\beta}\gamma\cosh(\hat{\xi}_o+i\hat{\tau}_o+i\varphi)-e^{i\alpha}c\cosh(z+it)|\right\} > |c_o| \quad .$$

Entsprechendes hat man für das andere Vorzeichen, sowie für $(\hat{\xi},\hat{\tau}+\varphi)$ mit $\varphi\in[0,2\pi]$ und damit $(\hat{\xi},\hat{\tau})\in\vartheta$. -

Ferner ist für $(\hat{\xi},\hat{\tau})\in\vartheta$ anstelle von (ξ,τ) die Voraussetzung von Hilfssatz 1 b) $C^+ > 0$ und $C^- > 0$ erfüllt.

Denn sei z.B. mit $\sigma\in[-1,1]$

$$c_o\sigma - e^{i\beta}\gamma\cosh(\hat{\xi}+i\hat{\tau}) = e^{i\alpha}c\cosh\omega(\sigma) \ ,$$

d.h. $|e^{i\beta}\gamma\cosh(\hat{\xi}+i\hat{\tau}) + e^{i\alpha}c\cosh\omega(\sigma)| = |c_o\sigma| \leq |c_o|$.

Damit ist wegen $(\hat{\xi},\hat{\tau})\in\vartheta$

$$\cosh\omega(\sigma) \notin \overline{\{\cosh(z+it) \mid (z,t)\in\mathcal{B}_\delta\}} \ ,$$

also $C^+ \geq \delta$ und ebenso $C^- \geq \delta$.

Dieses hat ferner für die Funktionen $\hat{z}_o$ und $\hat{t}_o$ aus Hilfssatz 1 b) $\mathrm{Re}(\hat{z}_o(z,t) \pm i\hat{t}_o(z,t)) > 0$ für $(z,t)\in\mathcal{B}_\delta$ zur Folge.

<u>Hilfssatz 2:</u>

a) Von

(3.7) $\quad c_o\cosh(z_o\pm it_o) = e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\hat{\xi}\pm i\hat{\tau}) + e^{\pm i\alpha}c\cosh(z\pm it)$

gibt es zwei in $\mathcal{B}_\delta\times\vartheta$ holomorphe Lösungen $z_o = \tilde{z}_o(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau})$ und $t_o = \tilde{t}_o(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau})$ mit $\mathrm{Re}(\tilde{z}_o\pm i\tilde{t}_o) > 0$ und (vgl. (3.3))

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_o(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau}+2\pi) &= \tilde{z}_o(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau})\\
\tilde{t}_o(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau}+2\pi) &= \tilde{t}_o(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau}) + 2\pi\\
\tilde{z}_o(z,t;\hat{\xi}+2\pi i,\hat{\tau}) &= \tilde{z}_o(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau}) + 2\pi i\\
\tilde{t}_o(z,t;\hat{\xi}+2\pi i,\hat{\tau}) &= \tilde{t}_o(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau}) \quad .
\end{aligned}$$

Bzgl. der Abhängigkeit von (z,t) bei festem $(\hat{\xi},\hat{\tau})\in\vartheta$ besitzen $\tilde{z}_o$ und $\tilde{t}_o$ die Eigenschaften (3.4) aus Hilfssatz 1b). Alle Lösungen $\tilde{z}_o^*, \tilde{t}_o^*$ von (3.7) mit obigen Eigenschaften erfüllen mit ganzen Zahlen l und m

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_o^*(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau}) &= \tilde{z}_o(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau}) + i(l+m)\pi\\
\tilde{t}_o^*(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau}) &= \tilde{t}_o(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau}) + (l-m)\pi \quad .
\end{aligned}$$

b) Ist $v(z_o,t_o)$ eine ganze holomorphe Lösung von

$$(3.5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial z_o^2} + 2h_o^2\cosh 2z_o\cdot v = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial t_o^2} + 2h_o^2\cos 2t_o\cdot v\\ \text{mit}\quad h_o = \frac{1}{2}kc_o \quad , \end{cases}$$

dann hat man mit

$$u(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau}) = v(\tilde{z}_o(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau}),\tilde{t}_o(z,t;\hat{\xi},\hat{\tau}))$$

eine in $\mathcal{L}_\delta \times \vartheta$ holomorphe Lösung von

$$(3.8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \hat\xi^2} + 2\hat h^2 \cosh 2\hat\xi \cdot u = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial\hat\tau^2} + 2\hat h^2 \cos 2\hat\tau\cdot u \\ \text{mit} \quad \hat h = \frac12 k\gamma \quad . \end{cases}$$

<u>Beweis:</u>

Nach den Vorbemerkungen können wir den Hilfssatz 1 verwenden. Zu a) muß noch $D^\pm \geqq \tilde A^\pm$ für

$$\tilde A^\pm = \max\left(|\Re \hat\xi_1^\pm|, |\Re\hat\xi_2^\pm|\right)$$

mit

$$e^{\pm i\beta}\gamma\cosh\hat\xi_1^\pm = c_0 - e^{\pm i\alpha} c\cosh(z\pm it)$$

$$e^{\pm i\beta}\gamma\cosh\hat\xi_2^\pm = -c_0 - e^{\pm i\alpha}c\cosh(z\pm it)$$

(vgl. mit (3.2)) überlegt werden. Wegen

$$|e^{i\beta}\gamma\cosh\hat\xi_\varkappa^+ + e^{i\alpha}c\cosh(z+it)| = |c_0|$$

ergibt sich aus der Definition von ϑ und von D^+

$$|\Re\hat\xi_\varkappa^+| \leqq D^+ \quad (\varkappa=1,2) \text{ , also}$$

$$\tilde A^+ \leqq D^+ \quad \text{und ebenso} \quad \tilde A^- \leqq D^- \quad .$$

Nun kann die Behauptung gemäß der Beweise von Hilfssatz 1 a) und 1 b) aus

$$\cosh f^\pm(\lambda,\mu) = f_1^\pm(\lambda,\mu)$$

mit den in

$$\{\lambda \mid |\Re\lambda| < \delta\} \times \{\mu \mid \Re\mu > D^\pm\}$$

holomorphen Funktionen

$$f_1^\pm(\lambda,\mu) = \frac{1}{c_0}\left(e^{\pm i\alpha}c\cosh\lambda + e^{\pm i\beta}\gamma\cosh\mu\right)$$

gewonnen werden.

Teil b) zeigt man vollkommen analog zu Hilfssatz 1 c). –

In Hilfssatz 3 erhalten wir nun asymptotische Aussagen über die Funktionen z_0 und t_0 aus Hilfssatz 1 a), die bei der Herleitung der Integralrelationen in Abschnitt 4 von großer Bedeutung sind. Wir schließen also in den Bezeichnungen an Hilfssatz 1 an.

<u>Hilfssatz 3:</u>

<u>Vor.:</u> Es sei $K \geqq 0$, $0<\eta<\pi$ und für $(x;\chi,\psi)\in\mathbb{C}^3$

$$w(x;\chi,\psi) = \frac12\left(e^x\cos(\chi-\psi) + e^{-x}\cos(\chi+\psi)\right) .$$

<u>Beh.:</u> Für $\Re z\longrightarrow\infty$ bei $|\Im t| \leqq K$ gilt gleichmäßig in $\mathcal{L}_a$

a) $2h_0\cosh z_0(z,t) = 2h\cosh z + 2\hat h\, w(\zeta;\tau,t+\alpha-\beta) + O\left(\frac{1}{\cosh z}\right)$,

b) $t_0(z,t) = t+\alpha+O\left(\frac{1}{\cosh z}\right)$

bei geeigneter Festlegung von $z_0 \pm it_0$ gemäß der letzten Aussage von Hilfssatz 1 a).

c) Für $|\arg(2h\cosh z)| \leqq \pi-\eta$ existiert für alle hinreichend großen Werte von $\Re z$ eine Zahl η_1 $(0<\eta_1<\pi)$ mit $|\arg(2h_0\cosh z_0)| \leqq \pi-\eta_1$.

<u>Beweis:</u>

Wir dividieren die beiden Gleichungen

$$(3.1)\quad c_0\cosh(z_0\pm it_0) = e^{\pm i\alpha}c\cosh(z\pm it) + e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\zeta\pm i\tau)$$

und erhalten

$$\frac{\cosh(z_0+it_0)}{\cosh(z_0-it_0)} = \frac{e^{i\alpha}c\cosh(z+it)+e^{i\beta}\gamma\cosh(\zeta+i\tau)}{e^{-i\alpha}c\cosh(z-it)+e^{-i\beta}\gamma\cosh(\zeta-i\tau)}$$

$$= e^{2i(t+\alpha)}\cdot\frac{1+e^{-2z-2it}+e^{-z-it}\cdot O(1)}{1+e^{-2z+2it}+e^{-z+it}\cdot O(1)} \quad ,$$

d.h. wegen $|\Im t| \leqq K$ und

$$e^{-z} = \frac{1}{2\cosh z - e^{-z}} = O\left(\frac{1}{\cosh z}\right)$$

$$(*) \qquad \frac{\cosh(z_o+it_o)}{\cosh(z_o-it_o)} = e^{2i(t+\alpha)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\cosh z}\right)\right) .$$

Damit hat man

$$\left|\frac{\cosh(z_o+it_o)}{\cosh(z_o-it_o)}\right| \leqq K_1 \ (>0)$$

und genauso

$$\left|\frac{\cosh(z_o-it_o)}{\cosh(z_o+it_o)}\right| \leqq K_2 \ (>0) .$$

Aufgrund (3.1) gilt mit $\Re z \longrightarrow \infty$ $\quad \Re z_o \pm \Im t_o \longrightarrow \infty$ und damit für alle hinreichend großen $\Re z$ etwa

$$e^{-2(\Re z_o - \Im t_o)} \leqq \frac{1}{2} .$$

Wir schätzen weiter ab

$$K_1 \geqq \left|\frac{\cosh(z_o+it_o)}{\cosh(z_o-it_o)}\right| = \left|\frac{1 + e^{-2(z_o+it_o)}}{e^{-2it_o}(1 + e^{-2(z_o-it_o)})}\right| \geqq$$

$$\geqq \frac{1 - e^{-2(\Re z_o - \Im t_o)}}{e^{2\Im t_o}(1 + e^{-2(\Re z_o + \Im t_o)})} \geqq \frac{1}{4\, e^{2\Im t_o}} \quad ;$$

d.h. $\Im t_o$ nach unten beschränkt. In ähnlicher Weise erhält man aus dem Reziproken die Beschränktheit von $\Im t_o$ nach oben. Also:

$$|\Im t| \leqq K \curvearrowright \exists\, K_o > 0 : |\Im t_o| \leqq K_o \quad \text{für } (z,t) \in \mathcal{L}_a .$$

Danach kann aus (3.1) weitererrechnet werden

$$c_o^2(\cosh^2 z_o - \sin^2 t_o) = c_o^2 \cosh(z_o+it_o)\cosh(z_o-it_o) =$$

$$= c^2\cosh(z+it)\cosh(z-it) + \gamma c\left(e^{i(\alpha-\beta)}\cosh(z+it)\cosh(\zeta-i\tau) + e^{-i(\alpha-\beta)}\cosh(z-it)\cosh(\zeta+i\tau)\right) + \gamma^2\cosh(\zeta+i\tau)\cosh(\zeta-i\tau)$$

$$c_o^2\cosh^2 z_o = c^2\cosh^2 z + 2\gamma c\cosh z\Big(\cos(\alpha-\beta)\big(\cosh\zeta\cos t\cos\tau + \sinh\zeta\sin t\sin\tau\,\frac{\sinh z}{\cosh z}\big) - \sin(\alpha-\beta)\big(\cosh\zeta\sin t\cos\tau\,\frac{\sinh z}{\cosh z} - \sinh\zeta\cos t\sin\tau\big)\Big) + O(1) \quad ;$$

wegen $\dfrac{\sinh z}{\cosh z} = 1 - \dfrac{e^{-z}}{\cosh z} = 1 + o\left(\dfrac{1}{\cosh z}\right) \quad (\Re z \longrightarrow \infty)$

gilt dann

$$c_o^2\cosh^2 z_o = c^2\cosh^2 z + 2\, c\gamma\cosh z\left(\tfrac{1}{2}\, e^{\zeta}\cos(t+\alpha-\beta-\tau) + \tfrac{1}{2}\, e^{-\zeta}\cos(t+\alpha-\beta+\tau)\right) + O(1)$$

und

$$(+) \qquad \left(\frac{2h_o\cosh z_o}{2h\cosh z}\right)^2 = 1 + 2\,\frac{2\hat{h}\, w(\zeta;\tau,t+\alpha-\beta)}{2h\cosh z} + O\left(\frac{1}{\cosh^2 z}\right) .$$

Aus $(*)$ ergibt sich nun wegen $\Re z_o \pm \Im t_o \longrightarrow \infty$

$$(**) \qquad e^{2it_o}\,\frac{1 + e^{-2z_o-2it_o}}{1 + e^{-2z_o+2it_o}} = e^{2it_o}(1 + o(1)) = e^{2i(t+\alpha)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\cosh z}\right)\right)$$

und mit ganzer Zahl n

$$t_o + n\pi = t + \alpha + o(1) \quad (\Re z \longrightarrow \infty) ,$$

was bei entsprechender Festlegung von z_o und t_o (vgl. Hilfssatz 1 a))

$$t_o = t + \alpha + o(1)$$

bedeutet. Zusammen mit (3.1) (nach Addition der beiden Gleichungen) hat man

$$2c_o\cosh z_o\cos t_o = c\left(e^{i\alpha}\cosh(z+it) + e^{-i\alpha}\cosh(z-it)\right) + O(1)$$

$$= 2c\cosh z\left(\cos t\cos\alpha - \sin t\sin\alpha\,\frac{\sinh z}{\cosh z}\right) + O(1),$$

d.h.

$$\frac{2h_o\cosh z_o}{2h\cosh z}\cos t_o = \cos(t+\alpha) + O\left(\frac{1}{\cosh z}\right)$$

und

$$\frac{2h_o\cosh z_o}{2h\cosh z} \longrightarrow 1 \quad \text{für } \Re z \longrightarrow +\infty .$$

Genauer erhält man damit aus (+) die Behauptung a)

$$\frac{2\,h_0 \cosh z_0}{2\,h \cosh z} = \sqrt{1 + 2\,\frac{2\hat{h}\; w(\zeta;\tau,t+\alpha-\beta)}{2\,h \cosh z} + O\left(\frac{1}{\cosh^2 z}\right)}$$

$$= 1 + \frac{2\hat{h}\; w(\zeta;\tau,t+\alpha-\beta)}{2\,h \cosh z} + O\left(\frac{1}{\cosh^2 z}\right) \quad .$$

Aus a) folgt wegen $\mathcal{R}u\, z_o \longrightarrow \infty$ $\quad e^{-z_0} = O\left(\frac{1}{\cosh z}\right)$

und nach (**)

$$e^{2it_0} = e^{2i(t+\alpha)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\cosh z}\right)\right) \quad ,$$

was mit obiger Festlegung von z_o und t_o

$$t_o = t + \alpha + O\left(\frac{1}{\cosh z}\right)$$

heißt.

Die Behauptung c) ergibt sich sofort aus a) , weil $w(\zeta;\tau,t+\alpha-\beta)$ in $\mathcal{L}_a$ mit $|\mathcal{J}m\, t| \leq K$ beschränkt ist.

4. Integralrelationen

Hilfssatz 4:

Es sei h^2 normaler Wert zu 0 und 1 .

Dann läßt sich die ganze Funktion

$$w(z;t,\tau) = \frac{1}{2}\left(e^{z}\cos(t-\tau) + e^{-z}\cos(t+\tau)\right) \qquad (z;t,\tau) \in \mathbb{C}^3$$

in die in kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}^3$ absolut gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln

$$e^{2ih\, w(z;t,\tau)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m me_m(-\tau;h^2)\, M_m^{(1)}(z;h)\, me_m(t;h^2) \quad .$$

Beweis:

Wir betrachten für $\mathcal{R}u(z\pm it) > 0$ mit

$$R\, e^{\pm i\phi} = c\, \cosh(z\pm it) \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} R\cos\phi &= c\, \cosh z \cos t \\ R\sin\phi &= c\, \sinh z \sin t \end{aligned}$$

die Funktionen $R(z,t)$ und $\phi(z,t)$. Diese lassen sich durch

$$R(z,t) = c\,\big(\cosh(z+it)\cosh(z-it)\big)^{1/2} \quad , \quad e^{2i\phi(z,t)} = \frac{\cosh(z+it)}{\cosh(z-it)}$$

im Bereiche $\mathcal{R}u(z\pm it) > 0$ als holomorphe Funktionen festlegen; es gilt:

$$\begin{aligned} R(z,t+\pi) &= R(z,t) \\ \phi(z,t+\pi) &= \phi(z,t) + \pi \quad . \end{aligned}$$

Damit hat man für $e^{2ihw(z;t,-\tau)}$ mit $h = \frac{1}{2}kc$

$$e^{2ih\, w(z;t,-\tau)} = e^{ik\left(c\cdot\cosh z \cos t \cos\tau + c\, \sinh z \sin t \sin(-\tau)\right)}$$

$$= e^{ikR(z,t)\cos\left(\phi(z,t)+\tau\right)}$$

Nach Definition der Besselfunktionen ganzer Indizes ([3],S.62) erhält man die Reihe

$$e^{2ih\, w(z;t,-\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kR(z,t))\; e^{-in\phi(z,t)}\; e^{-in\tau} \quad .$$

Diese ist in kompakten Mengen bzgl. (R,ϕ) und damit auch in kompakten Teilmengen von $\mathcal{R}e(z\pm it)>0$ gleichmäßig konvergent und kann gliedweise integriert werden.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2ih\,w(z;t,\tau)}\,me_m(-t;h^2)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2ih\,w(z;t,-\tau)}\,me_m(t;h^2)\,dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\tau}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_n(kR)\,e^{-in\phi}\,me_n(t;h^2)\,dt \quad .$$

Zusammen mit der Definition von $M_m^{(1)}$ ([1],S.168)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_{m+r}(kR)\,e^{-i(m+r)\phi}\,me_m(t;h^2)\,dt = \begin{cases} (-1)^s c_{2s}^m(h^2)\,M_m^{(1)}(z;h) & (r=2s) \\ 0 & (r=2s+1) \end{cases}$$

$$(s=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \quad ; \quad \mathcal{R}e\,z>0)$$

erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2ih\,w(z;t,\tau)}\,me_m(-t;h^2)\,dt =$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{\infty} i^{m+2s}\,e^{-i(m+2s)\tau}\,(-1)^s c_{2s}^m(h^2)\,M_m^{(1)}(z;h)$$

$$= i^m\,me_m(-\tau;h^2)\,M_m^{(1)}(z;h) \quad .$$

Damit gilt die Integralrelation zunächst nur für $\mathcal{R}e\,z>0$. Der Identitätssatz liefert dann die obige Formel für alle z, da beide Seiten der Gleichung ganze Funktionen in z sind. Weil nun h^2 normaler Wert zu 0 und 1 ist, erhält man für die in t 2π-periodische Funktion $e^{2ih\,w(z;t,\tau)}$ aus dem Entwicklungssatz nach Mathieuschen Funktionen (vgl. [1],S.127 u. Satz 1)

$$e^{2ih\,w(z;t,\tau)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2ih\,w(z;t',\tau)}\,me_m(-t';h^2)\cdot dt'\;me_m(t;h^2)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m\,me_m(-\tau;h^2)\,M_m^{(1)}(z;h)\,me_m(t;h^2) \quad .$$

Mit den Überlegungen von Abschnitt 3 und mit Hilfssatz 4 haben wir nun alle Hilfsmittel in der Hand, um die Integralrelationen beweisen zu können.

<u>Satz 2:</u>

Es seien die Aussagen von Hilfssatz 1 mit den entsprechenden Bezeichnungen und die Festlegungen der Funktionen nach Hilfssatz 3 gegeben. Für $j=1,2,3,4$ und $\nu\in\mathbb{C}$ bezeichnen wir in $\mathcal{L}_a$

$$u_\nu^{(j)}(z,t) = M_\nu^{(j)}(z_o(z,t);h_o)\cdot me_\nu(t_o(z,t);h_o^2) \quad .$$

Dann hat man für zu 0 und 1 normale Werte $\hat{h}^2$ und für alle ganzen Zahlen n in

$$\mathcal{R}e\,z > \max(A^+ + \mathcal{I}m\,\vartheta,\; A^- - \mathcal{I}m\,\vartheta) \qquad (\vartheta\in\mathbb{C})$$

$$(4.1)\quad \frac{1}{2\pi}\int_\vartheta^{\vartheta+2\pi} u_\nu^{(j)}(z,t)\,me_{\nu+n}(-t;h^2)\,dt = \Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{mn}M_m^{(1)}(\zeta;\hat{h})\,me_m(\tau;\hat{h}^2)\Big\}\,M_{\nu+n}^{(j)}(z;h)$$

mit

$$(4.2)\quad K_{mn}(\alpha,h^2;\beta,\hat{h}^2) = i^{m+n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} me_m(-t+\beta;\hat{h}^2)\,me_\nu(t;h_o^2)\,me_{\nu+n}(-t+\alpha;h^2)\,dt$$

(dabei ist $K_{mn}=0$ für m+n ungerade) .

<u>Beweis:</u>

Wir wählen in Hilfssatz 1 c) die ganze Funktion

$$v(z_o,t_o) = M_\nu^{(j)}(z_o;h_o)\;me_\nu(t_o;h_o^2) \quad .$$

Dann hat die in $\mathcal{L}_a$ holomorphe Lösung $u_\nu^{(j)}$ der auf (z,t)-Koordinaten transformierten Schwingungsgleichung die Eigenschaft

$$u_\nu^{(j)}(z,t+2\pi) = e^{2\pi i\nu}\,u_\nu^{(j)}(z,t) \quad .$$

Zusammen mit der 2π-Periodizität von $u_\nu^{(j)}(z,t)\,me_{\nu+n}(-t;h^2)$

folgt für die Integrale

$$I_n^{(j)}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} u_\nu^{(j)}(z,t)\, me_{\nu+n}(-t;h^2)\,dt \quad ,$$

daß sie in $\Re z > \max(A^+ + \Im\vartheta\ ,\ A^- - \Im\vartheta)$

Lösungen der modifizierten Mathieuschen Differentialgleichung zum Parameterpaar $(\lambda_{\nu+n}(h^2),h^2)$ sind (vgl. [1],S.33).

Durch Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von $I_n^{(j)}$ entscheiden wir, um welche Lösung es sich handelt. Dazu benutzen wir zunächst für $j=3$ den Hilfssatz 3 , sowie die asymptotischen Formeln der Funktion $M_\nu^{(3)}$

$$M_\nu^{(3)}(z_0;h_0) = \mathcal{Z}_\nu^{(3)}(2h_0\cosh z_0)\left(1+O\left(\frac{1}{\cosh z_0}\right)\right)$$

$$\Re z_0 \longrightarrow \infty \quad , \quad |\Im t_0| \le \text{const.}$$

und der ersten Hankelschen Funktion $\mathcal{Z}_\nu^{(3)} = H_\nu^{(1)}$

$$\mathcal{Z}_\nu^{(3)}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} e^{i(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$x \longrightarrow \infty \quad , \quad |\arg x| \le \pi-\delta \quad (0<\delta<\pi).$$

Für $|\arg(2h\cosh z)| \le \pi-\eta \quad (0<\eta<\pi)$, $\Re z \longrightarrow \infty$

und $|\Im t| \le |\Im\vartheta| + 1$

wird dann für genügend große $\Re z$

$$|\arg(2h_0\cosh z_0(z,t))| \le \pi-\eta_1 \quad (0<\eta_1<\pi)$$

und

$$M_\nu^{(3)}(z_0(z,t);h_0) = \left(\frac{2}{\pi 2h\cosh z}\right)^{1/2} e^{i(2h\cosh z+2\hat{h}w(\zeta;\tau,t+\alpha-\beta)-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} \times \left(1+O\left(\frac{1}{\cosh z}\right)\right) ;$$

ferner ergibt sich aus Hilfssatz 3 b) bei geeigneter Wahl von $\vartheta'\in\mathbb{C}$ mit $|\Im\vartheta' - \Im\vartheta|<1$ $(\curvearrowright |\Im\vartheta'| \le |\Im\vartheta| + 1)$ $me_\nu(t+\alpha;h_0^2) \ne 0$ bzw. $|me_\nu(t+\alpha;h_0^2)| \ge N>0$ für $t\in[\vartheta',\vartheta'+2\pi]$

und zusammen mit der Holomorphie von me_ν

$$me_\nu(t_0(z,t);h_0^2) = me_\nu\left(t+\alpha+O\left(\frac{1}{\cosh z}\right);h_0^2\right) = me_\nu(t+\alpha;h_0^2)\left(1+O\left(\frac{1}{\cosh z}\right)\right) .$$

Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes für das Viereck $\vartheta, \vartheta+2\pi, \vartheta'+2\pi, \vartheta', \vartheta$ und der 2π-Periodizität des Integranden erhalten wir dann in

$$\Re z > \max(A^+ + \Im\vartheta',\ A^- - \Im\vartheta') + 1$$

$$I_n^{(3)}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta'}^{\vartheta'+2\pi} u_\nu^{(j)}(z,t)\, me_{\nu+n}(-t;h^2)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta'}^{\vartheta'+2\pi} e^{2i\hat{h}w(\zeta;\tau,t+\alpha-\beta)}\, me_\nu(t+\alpha;h_0^2)\, me_{\nu+n}(-t;h^2)\,dt \cdot i^n\,\mathcal{Z}^{(3)}_{\nu+n}(2h\cosh z)\left(1+O\left(\frac{1}{\cosh z}\right)\right)$$

$$= \frac{i^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2i\hat{h}w(\zeta;\tau,t+\alpha-\beta)}\, me_\nu(t+\alpha;h_0^2)\, me_{\nu+n}(-t;h^2)\,dt\; M^{(3)}_{\nu+n}(z;h) ,$$

wobei die letzte Gleichung nach dem Identitätssatz wieder in $\Re z > \max(A^+ + \Im\vartheta,\ A^- - \Im\vartheta)$ gilt. Mit Hilfssatz 4 und durch Vertauschung von Summation und Integration der gleichmäßig konvergenten Reihe hat man

$$I_n^{(3)}(z) = M^{(3)}_{\nu+n}(z;h)\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{n+m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} me_m(-t-\alpha+\beta;\hat{h}^2)\, me_\nu(t+\alpha;h_0^2)\, me_{\nu+n}(-t;h^2)\,dt \cdot M_m^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_m(\tau;\hat{h}^2)$$

$$= \left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{mn} M_m^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_m(\tau;\hat{h}^2)\right\} M^{(3)}_{\nu+n}(z;h)$$

mit $(t+\alpha \longrightarrow t)$

$$K_{mn} = \frac{i^{n+m}}{2\pi}\int_0^{2\pi} me_m(-t+\beta;\hat{h}^2)\, me_\nu(t;h_0^2)\, me_{\nu+n}(-t+\alpha;h^2)\,dt \quad .$$

Für j=4 erhalten wir entsprechend der Reihe nach:

$$M_\nu^{(4)}(z_o(z,t);h_o) = \left(\frac{2}{\pi 2h\cosh z}\right)^{1/2} e^{-i(2h\cosh z - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \times$$

$$\times\ e^{-2i\hat{h}\, w(\zeta;\tau,t+\alpha-\beta)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\cosh z}\right)\right),$$

$$I_n^{(4)}(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2i\hat{h}w(\zeta;\tau,t+\alpha-\beta)}\, me_\nu(t+\alpha;h_o^2)\, me_{\nu+n}(-t;h^2)\, dt \cdot M_{\nu+n}^{(4)}(z;h)$$

$$= \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2i\hat{h}w(\zeta;\tau+\pi,t+\alpha-\beta)}\, me_\nu(t+\alpha;h_o^2)\, me_{\nu+n}(-t;h^2)\, dt\ M_{\nu+n}^{(4)}(z;h)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{i^{m-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} me_m(-t+\beta;\hat{h}^2)\, me_\nu(t;h_o^2)\, me_{\nu+n}(-t+\alpha;h^2)\, dt\ \times$$

$$\times\ M_m^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_m(\tau+\pi;\hat{h}^2)\cdot M_{\nu+n}^{(4)}(z;h)$$

$$= \left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{K}_{mn}\, M_m^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_m(\tau;\hat{h}^2)\right\} M_{\nu+n}^{(4)}(z;h)$$

mit

$$\hat{K}_{mn}(\alpha,h^2;\beta,\hat{h}^2) = (-1)^{m+n} K_{mn}(\alpha,h^2;\beta,\hat{h}^2)$$

$$= K_{mn}(\alpha,h^2;\beta,\hat{h}^2) \qquad ,$$

da wegen der π-Halbperiodizität des Integranden K_{mn} für ungerade $m+n$ verschwindet.

Damit gilt (4.1) mit (4.2) wegen $M^{(1,2)} = M^{(3)} \pm iM^{(4)}$ auch für $j = 1,2$. -

Bemerkung:

Mit den Fourier-Reihen

$$me_m(-t+\beta;\hat{h}^2) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_{2s}^m(\hat{h}^2)\, e^{-i(m+2s)(t-\beta)} \qquad \text{und}$$

$$me_{\nu+n}(-t+\alpha;h^2) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} c_{2q}^{\nu+n}(h^2)\, e^{-i(\nu+n+2q)(t-\alpha)}$$

wird

$$K_{mn} = i^{m+n}\sum_{s,q=-\infty}^{\infty} c_{2s}^m(\hat{h})\, e^{i(m+2s)\beta}\, c_{2q}^{\nu+n}(h^2)\, e^{i(\nu+n+2q)\alpha}\ \times$$

$$\times\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} me_\nu(t;h_o^2)\, e^{-i(\nu+n+2q+m+2s)t}\, dt$$

und mit $m=2l-n$, $s=p-l$

$$K_{2l-n\ n} = (-1)^l\sum_{p,q=-\infty}^{\infty} c_{2p-2l}^{2l-n}(\hat{h}^2)\, e^{i(2p-n)\beta}\, c_{2q}^{\nu+n}(h^2)\, e^{i(\nu+n+2q)\alpha}\, c_{2p+2q}^{\nu}(h_o^2) .$$

5. Die Additionstheoreme

Die Integralrelationen von Satz 2 ergeben zusammen mit Satz 1 die gewünschten Reihen.

Satz 3:

Vor.: Es sei h^2 normaler Wert zu ν und $\nu+1$ ($\nu \in \mathbb{C}$) und $\hat{h}^2$ normaler Wert zu 0 und 1. Ferner ist in den Bezeichnungen an Abschnitt 3 anzuschließen.

Beh.: 1) In $\Re z \pm \Im t > A = \max(A^+,A^-)$ [1] und bei nicht ganzem ν in $\mathcal{L}_a$ gilt mit $K_{mn}(\alpha,h^2;\beta,\hat{h}^2)$ aus (4.2)

$$(5.1)\quad M_\nu^{(j)}(z_o(z,t);h_o)\, me_\nu(t_o(z,t);h_o^2) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{mn} M_m^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_m(\tau;\hat{h}^2)\right\} M_{\nu+n}^{(j)}(z;h)\, me_{\nu+n}(t;h^2)$$

2) In $\mathcal{L}_a$ kann für ganzes ν in die Reihe

$$M_\nu^{(j)}(z_o(z,t);h_o)\, me_\nu(t_o(z,t);h_o^2) = \left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{mo} M_m^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_m(\tau;\hat{h}^2)\right\} M_o^{(j)}(z;h)\, me_o(t;h^2) +$$

$$(5.2)\qquad + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{mn} M_m^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_m(\tau;\hat{h}^2)\Big\} M_n^{(j)}(z;h)\, me_n(t;h^2)\ +$$

$$+\Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{m\,-n} M_m^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_m(\tau;\hat{h}^2)\Big\} M_{-n}^{(j)}(z;h)\, me_{-n}(t;h^2)\Big]$$

mit den Konstanten

$$K_{mn} = i^{m+n}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} me_m(-t+\beta;\hat{h}^2)\, me_\nu(t;h_o^2)\, me_n(-t+\alpha;h^2)\, dt$$

entwickelt werden.

---

1) Im Falle $A^+ = A^- = A$ ist dieser Bereich gleich $\mathcal{L}_a$.

Durch Vertauschen der Parameter α, h^2, z, t mit $\beta, \hat{h}^2, \zeta, \tau$ und durch Umordnen der Reihen erhält man formal das entsprechende "Innenraumadditionstheorem".

<u>Satz 4:</u>

<u>Vor.:</u> Es sei h^2 normaler Wert zu 0 und 1 und $\hat{h}^2$ normaler Wert zu ν und $\nu+1$. Mit

$$\min_{\varphi\in[0,2\pi]}\Big\{\min_{\sigma\in[-1,1]} \left| e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\zeta \pm i\tau + i\varphi) - e^{\pm i\alpha} c\,\sigma \right|\Big\} > |c_o| \tag{5.3}$$ 1)

sind die Aussagen von Hilfssatz 1 bzgl. der Funktionen $\hat{z}_o$ und $\hat{t}_o$ erfüllt.

<u>Beh.:</u> Dann gilt in $\mathcal{L}_i$

$$\begin{aligned} M_\nu^{(j)}(\hat{z}_o(z,t);h_o)\,me_\nu(\hat{t}_o(z,t);h_o^2) &= \Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{mo} M_{\nu+m}^{(j)}(\zeta;\hat{h})\,me_{\nu+m}(\tau;\hat{h}^2)\Big\} M_o^{(1)}(z;h)\,me_o(t;h^2) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{mn} M_{\nu+m}^{(j)}(\zeta;\hat{h})\,me_{\nu+m}(\tau;\hat{h}^2)\Big\} M_n^{(1)}(z;h)\,me_n(t;h^2) + \\ &+ \Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{m\,-n} M_{\nu+m}^{(j)}(\zeta;\hat{h})\,me_{\nu+m}(\tau;\hat{h}^2)\Big\} M_{-n}^{(1)}(z;h)\,me_{-n}(t;h^2)\Big] \end{aligned} \tag{5.4}$$

und in $|\mathrm{Re}\,z \mp \mathrm{Im}\,t| < B = \min(B^+, B^-)$

$$\begin{aligned} M_\nu^{(j)}(\hat{z}_o(z,t);h_o)\,me_\nu(\hat{t}_o(z,t);h_o^2) &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{mn} M_{\nu+m}^{(j)}(\zeta;\hat{h})\,me_{\nu+m}(\tau;\hat{h}^2)\Big\} M_n^{(1)}(z;h)\,me_n(t;h^2) \end{aligned} \tag{5.5}$$

mit den Konstanten aus (4.2)

$$L_{mn} = K_{nm}(\beta, \hat{h}^2; \alpha, h^2) \quad .$$

---

1) Durch geeignete Wahl von β, γ kann (5.3) durch

$$\min_{\sigma\in[-1,1]}\big\{\left| e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\zeta \pm i\tau) - e^{\pm i\alpha} c\,\sigma \right|\big\} > |c_o| \tag{5.6}$$

ersetzt werden (vgl. Bem. 3 dieses Abschnittes).

<u>Beweise:</u> Die in $\mathcal{L}_a$ holomorphen Funktionen

$$u_\nu^{(j)}(z,t) = M_\nu^{(j)}(z_o(z,t);h_o)\,me_\nu(t_o(z,t);h_o^2)$$

erfüllen $\quad u_\nu^{(j)}(z,t+2\pi) = e^{2\pi i\nu}\,u_\nu^{(j)}(z,t)$.

Dann können für jedes z mit $\mathrm{Re}\,z > \frac{1}{2}(A^+ + A^-)$ die Funktionen von t im Streifen

$$\mathrm{Re}\,z - A^+ > \mathrm{Im}\,t > -\mathrm{Re}\,z + A^-$$

(bzw. im zur reellen Achse symmetrischen Streifen

$$\mathrm{Re}\,z - A > \mathrm{Im}\,t > -\mathrm{Re}\,z + A \quad)$$

nach Mathieuschen Funktionen entwickelt werden, da h^2 normaler Wert zu ν und $\nu+1$ ist:

$$u_\nu^{(j)}(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} u_\nu^{(j)}(z,t')\,me_{\nu+n}(-t';h^2)\,dt' \cdot me_{\nu+n}(t;h^2)$$

mit

$$\mathrm{Re}\,z - A^+ > \mathrm{Im}\,\vartheta > -\mathrm{Re}\,z + A^- \quad .$$

Die Entwicklungskoeffizienten liefert dabei gerade (4.1), (4.2) aus Satz 2 .

Beim Beweise von Satz 4 entwickeln wir für jedes z mit $|\mathrm{Re}\,z| < \frac{1}{2}(B^+ + B^-)$ die Funktionen von t

$$\hat{u}_\nu^{(j)}(z,t) = M_\nu^{(j)}(\hat{z}_o(z,t);h_o)\,me_\nu(\hat{t}_o(z,t);h_o^2)$$

im Streifen

$$\max(-B^+ + \mathrm{Re}\,z, -B^- - \mathrm{Re}\,z) < \mathrm{Im}\,t < \min(B^+ + \mathrm{Re}\,z,\; B^- - \mathrm{Re}\,z)$$

in die Reihen

$$\hat{u}_\nu^{(j)}(z,t) = b_o^{(j)}(z)\,me_o(t;h^2) + \sum_{n=1}^{\infty}\{b_n^{(j)}(z)\,me_n(t;h^2) + b_{-n}^{(j)}(z)\,me_{-n}(t;h^2)\},$$

da $\hat{u}_\nu^{(j)}(z,t+2\pi) = \hat{u}_\nu^{(j)}(z,t)$ gilt und h^2 normaler Wert zu 0 und 1 ist. Die Koeffizienten

$$b_n^{(j)}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi}\hat{u}_\nu^{(j)}(z,t)\cdot me_n(-t;h^2)\,dt$$

mit $\quad \max(-B^+ + \mathrm{Re}\,z, -B^- - \mathrm{Re}\,z) < \mathrm{Im}\,\vartheta < \min(B^+ + \mathrm{Re}\,z,\; B^- - \mathrm{Re}\,z)$

sind dann Lösungen der modifizierten Mathieuschen Differentialgleichung zum Parameterpaar $(\lambda_n(h^2),h^2)$ in
$\max(-B^+ + \Im\vartheta, -B^- - \Im\vartheta) < \Re z < \min(B^+ + \Im\vartheta, B^- - \Im\vartheta)$.
Da nach Hilfssatz 2 $b_n^{(j)}(z+2\pi i) = b_n^{(j)}(z)$ gilt und da nur $M_n^{(1)}$ $2\pi i$-periodisch ist, hat man

$$b_n^{(j)}(z) = B_n^{(j)} M_n^{(1)}(z;h)$$

und damit

$$(+)\quad \hat u_\nu^{(j)}(z,t) = B_0^{(j)} M_0^{(1)}(z;h)\cdot me_0(t;h^2) + \sum_{n=1}^{\infty}\{B_n^{(j)} M_n^{(1)}(z;h)\, me_n(t;h^2) + B_{-n}^{(j)} M_{-n}^{(1)}(z;h)\, me_{-n}(t;h^2)\}.$$

Zur Auswertung der Koeffizienten $B_n^{(j)}$ stützen wir uns nun auf Satz 1 und Hilfssatz 2. Dazu wählen wir nach (5.3) eine Zahl $\delta>0$, so daß mit

$$\mathcal{L}_\delta = \{(z,t) \mid |\Re(z\pm it)| < \delta\}$$

$$\min_{\varphi\in[0,2\pi]}\{\inf_{(z,t)\in\mathcal{L}_\delta} |e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\zeta\pm i\tau+i\varphi) - e^{\pm i\alpha}c\cosh(z\pm it)|\} > |c_0|$$

erfüllt ist. Mit dem Gebiete (vgl. Abschnitt 2)

$$\vartheta = \Big\{(\hat\zeta,\hat\tau) \;\Big|\; \Re(\hat\zeta\pm i\hat\tau)>0\,,\ \min_{\varphi\in[0,2\pi]}\{\inf_{(z,t)\in\mathcal{L}_\delta} |e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\hat\zeta\pm i\hat\tau+i\varphi) - e^{\pm i\alpha}c\cosh(z\pm it)|\} > |c_0|\Big\}$$
$$= \{(\hat\zeta,\hat\tau) \mid \Re(\hat\zeta\pm i\hat\tau) > D^\pm\}$$

– es ist dann $(\zeta,\tau)\in\vartheta$ – betrachten wir die in $\mathcal{L}_\delta\times\vartheta$ holomorphen Funktionen $\tilde z_0$ und $\tilde t_0$ von Hilfssatz 2, die bzgl. $(\hat\zeta,\hat\tau)\in\vartheta$ die asymptotischen Formeln von Hilfssatz 3 (bei entsprechender Vertauschung der Parameter) erfüllen.
$\hat z_0$ und $\hat t_0$ seien dann festgelegt durch

$$\hat z_0(z,t) = \tilde z_0(z,t;\zeta,\tau) \quad\text{und}\quad \hat t_0(z,t) = \tilde t_0(z,t;\zeta,\tau) \quad (z,t)\in\mathcal{L}_\delta.$$

Dann können wir auf

$$\tilde u_\nu^{(j)}(z,t;\hat\zeta,\hat\tau) = M_\nu^{(j)}(\tilde z_0(z,t;\hat\zeta,\hat\tau);h_0)\, me_\nu(\tilde t_0(z,t;\hat\zeta,\hat\tau);h_0^2)$$

für jedes feste $(z,t)\in\mathcal{L}_\delta$ bzgl. $(\hat\zeta,\hat\tau)\in\vartheta$ den Satz 3 anwenden ($\nu\neq$ganz).

$$\tilde u_\nu^{(j)}(z,t;\hat\zeta,\hat\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_{mn} M_n^{(1)}(z;h)\, me_n(t;h^2)\Big\} M_{\nu+m}^{(j)}(\hat\zeta;\hat h)\, me_{\nu+m}(\hat\tau;\hat h^2)$$

mit

$$L_{mn} = K_{nm}(\beta,\hat h^2;\alpha,h^2) \quad \text{(vgl. (4.2))}.$$

Speziell gilt dann für $\hat\zeta=\zeta$ und für jedes z $(|\Re z|<\delta)$ in
$\{t \mid |\Im t| < \delta - |\Re z|\} \times \{\hat\tau \mid \Re\zeta - D^+ > \Im\hat\tau > -\Re\zeta + D^-\}$
mit Satz 1

$$\tilde u_\nu^{(j)}(z,t;\zeta,\hat\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{mn} M_{\nu+m}^{(j)}(\zeta;\hat h)\, me_{\nu+m}(\hat\tau;\hat h^2)\Big\} M_n^{(1)}(z;h)\, me_n(t;h^2).$$

Für $\hat\tau=\tau$ und durch Zusammenfassung von Summanden erhält man aus dem Vergleich mit (+) die gesuchten Koeffizienten

$$B_n^{(j)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{mn} M_{\nu+m}^{(j)}(\zeta;\hat h)\, me_{\nu+m}(\tau;\hat h^2)\,,$$

wobei im Falle ganzer ν und $|\Im\tau| \geq \min(\Re\zeta - D^+, \Re\zeta - D^-)$ die Reihenglieder mit $\nu+m$ und $-\nu-m$ zusammenzufassen sind.

Bei $|\Re z \mp \Im t| < B$ sind mit $|\Re z| < B$ die t-Streifen $|\Im t| < B - |\Re z|$ symmetrisch zur reellen Achse und wir erhalten (5.5).

Die Entwicklung (+) im obigen Beweise gilt auch ohne die Voraussetzung (5.3), sondern schon für die schwächere von Hilfssatz 1 b) $C^+ > 0$ und $C^- > 0$. Jedoch gelingt dann keine Auswertung der Koeffizienten $B_n^{(j)}$.

Bemerkungen:

1) In Analogie zu Satz 2 sind die Entwicklungen (5.4) und (5.5) äquivalent mit den Integralrelationen

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} \hat{u}_{\nu}^{(j)}(z,t)\, me_n(-t;h^2)\, dt = \Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{mn} M_{\nu+m}^{(j)}(\varsigma;\hat{h})\, me_{\nu+m}(\tau;\hat{h}^2)\Big\} M_n^{(1)}(z;h)$$

$$\max(-B^+ + \mathrm{Re}\, z, -B^- - \mathrm{Re}\, z) < \mathrm{Im}\,\vartheta < \min(B^+ + \mathrm{Re}\, z,\ B^- - \mathrm{Re}\, z) \quad .-$$

2) Nach der Bemerkung zu Hilfssatz 1 sind $\mathcal{L}_a$ und $\mathcal{L}_i$ die maximalen Gültigkeitsbereiche der Additionstheoreme (5.1),(5.2) und (5.4),(5.5) . -

3) Für das "Innenraumadditionstheorem" Satz 4 benötigen wir die Voraussetzung

$$(5.3)\quad \min_{\varphi\in[0,2\pi]}\Big\{\min_{\sigma\in[-1,1]} |e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\varsigma\pm i\tau+i\varphi) - e^{\pm i\alpha}c\,\sigma|\Big\} > |c_0| \ .$$

Wir wollen durch Veränderung von β,γ und (ς,τ) bei $e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\varsigma\pm i\tau) = \text{const.}$ die Voraussetzung (5.3) zu

$$(5.6)\quad \min_{\sigma\in[-1,1]}\{|e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\varsigma\pm i\tau) - e^{\pm i\alpha}c\,\sigma|\} > |c_0|$$

"abschwächen".

Dazu sei in der Transformationsgleichung der "Abstand" zwischen den Zentren der (z,t)- und (z_0,t_0)-Koordinatensystemen mit $r\,e^{\pm i\psi}$ bezeichnet, also

$$c_0\cosh(z_0\pm it_0) = e^{\pm i\alpha}c\cosh(z\pm it) + r\,e^{\pm i\psi}$$

mit

$$\min_{\sigma\in[-1,1]}\{|r\,e^{\pm i\psi} - e^{\pm i\alpha}c\,\sigma|\} > |c_0| \ .$$

$\delta > 0$ sei dann so gewählt, daß mit $\varepsilon^{\pm} > 0$

$$\min_{|\mathrm{Re}\,x|\le\delta}\{|r\,e^{\pm i\psi} - e^{\pm i\alpha}c\cosh x|\} = |c_0| + \varepsilon^{\pm} \qquad \text{gilt.}$$

Für das obere Vorzeichen erhalten wir weiter, daß die Ellipse

$$\mathcal{E}_1^+ = \{e^{i\alpha}c\cosh(\delta+i\varphi) \mid \varphi\in[0,2\pi]\}$$

von $re^{i\psi}$ den Abstand

$$\min_{\varphi\in[0,2\pi]}\{|r\,e^{i\psi} - e^{i\alpha}c\cosh(\delta+i\varphi)|\} = |c_0| + \varepsilon^+$$

besitzt.

Mit den Halbachsen von $\mathcal{E}_1^+$ $a_1^+ = e^{-\mathrm{Im}\,\alpha}|c|\cosh\delta$ und $b_1^+ = e^{-\mathrm{Im}\,\alpha}|c|\sinh\delta$ ($a_1^{+2} - b_1^{+2} = |c|\,e^{-2\,\mathrm{Im}\,\alpha}$) bilden wir die Parallelellipse $\mathcal{E}_2^+$ zu $\mathcal{E}_1^+$ im Abstande $|c_0| + \varepsilon^+$ mit den Halbachen $a_2^+ = a_1^+ + |c_0| + \varepsilon^+$ und $b_2^+ = b_1^+ + |c_0| + \varepsilon^+$. Entsprechend sei zu $\mathcal{E}_1^-$ die Ellipse $\mathcal{E}_2^-$ im Abstande $|c_0| + \varepsilon^-$ durch $r\,e^{-i\psi}$ bestimmt. Wählen wir γ,β und (ς,τ) mit

$$\arg\gamma = \arg c \ , \quad \mathrm{Re}\,\beta = \mathrm{Re}\,\alpha \ ,$$

$$|\gamma|^2 e^{-2\,\mathrm{Im}\,\beta} = a_2^{+2} - b_2^{+2} = |c|^2 e^{-2\,\mathrm{Im}\,\alpha} + 2|c|e^{-\mathrm{Im}\,\alpha}(|c_0| + \varepsilon^+)e^{-\delta},$$

$$|\gamma|^2 e^{2\,\mathrm{Im}\,\beta} = |c|^2 e^{2\,\mathrm{Im}\,\alpha} + 2|c|e^{\mathrm{Im}\,\alpha}(|c_0| + \varepsilon^-)\,e^{-\delta}$$

und damit

$$e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\varsigma\pm i\tau) = r\,e^{\pm i\psi} \qquad (\mathrm{Re}(\varsigma\pm i\tau) > 0) \ ,$$

so hat man für $\mathcal{E}_2^{\pm}$ mit $re^{\pm i\psi}\in\mathcal{E}_2^{\pm}$ die Darstellung

$$\mathcal{E}_2^{\pm} = \{e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\varsigma\pm i\tau+i\varphi) \mid \varphi\in[0,2\pi]\} \ .$$

$\mathcal{E}_2^{\pm}$ hat nach Konstruktion einen Abstand von $\overline{-e^{\pm i\alpha}c, e^{\pm i\alpha}c}$, der größer als $|c_0|$ ist. Also folgt bei dieser Wahl der Parameter β,γ (5.3) schon aus

$$(5.6)\quad \min_{\sigma\in[-1,1]}\{|e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\varsigma\pm i\tau) - e^{\pm i\alpha}c\,\sigma|\} > |c_0| \ .$$

Bem. 4:

Für reelle Parameter $k, c_0 > 0, c > 0, \gamma > 0, \alpha, \beta, \varsigma, \tau$ gilt nach Definition (3.2)

$$A = A^+ = A^- \quad \text{und} \quad B = B^+ = B^- .$$

Wir betrachten dann die reellen (z,t)-Bereiche

$$\mathcal{L}_a^r = (A,\infty) \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_i^r = (-B,B) \times \mathbb{R}$$

und können die Funktionen z_0 und t_0 (bzw. $\hat{z}_0$ und $\hat{t}_0$) in $\mathcal{L}_a^r$ (bzw. $\mathcal{L}_i^r$) aus Hilfssatz 1 mit dem asymptotischen Verhalten von Hilfssatz 3 reellwertig wählen. Damit gelten die Additionstheoreme Satz 3 (5.1) in $\mathcal{L}_a^r$ und Satz 4 (5.5) in $\mathcal{L}_i^r$. Die Voraussetzung (5.3) von Satz 4 wird durch die Wahl von β, γ (vgl. Bem. 3) mit

$$\beta = \alpha \quad \text{und} \quad \gamma > 0$$

$$\gamma^2 = c^2 + 2c(c_0 + \varepsilon)\, e^{-\delta}$$

zu $\varsigma > 0$ und $\min\limits_{\sigma \in [-1,1]} \{ |\gamma \cosh(\varsigma + i\tau) - c\sigma| \} > c_0$.

6. Folgerungen

Durch Ausartung der elliptischen Koordinatensysteme zu Polarkoordinaten lassen sich mit völlig analogen Überlegungen wie in Satz 3 und Satz 4 noch weitere Reihenentwicklungen herleiten, und zwar die Entwicklungen von Mathieuschen Funktionen nach Zylinderfunktionen und von Zylinderfunktionen nach Mathieuschen Funktionen; insbesondere gewinnt man für

$$\beta = 0 \;, \; \gamma \longrightarrow 0 \;, \; 2\hat{h} \cosh\varsigma \longrightarrow k\varrho \;, \; \tau \longrightarrow \psi$$

$$\gamma \cosh(\varsigma \pm i\tau) = \varrho e^{\pm i\psi}$$

die Additionstheoreme (1.2) und (1.3) und deren Folgerungen (vgl. [1], [2] und [6]). Die Voraussetzung (5.3) erhält dann die Form (vgl. Abschnitt 1)

$$|\varrho|\, e^{\mp \operatorname{Im}\psi} > |c|\, e^{\mp \operatorname{Im}\alpha} + |c_0| \quad .$$

Weiter erhalten wir folgende Ausartungen der Additionstheoreme Satz 3 und Satz 4 :

Zunächst gilt mit $\alpha = 0$

$$c \longrightarrow 0 \;, \; 2h \cosh z \longrightarrow kR \;, \; t \longrightarrow \phi$$

$$c \cosh(z \pm it) = R\, e^{\pm i\phi}$$

für die in

$$\mathcal{L}_a = \left\{ (R,\phi) \,\middle|\, \begin{array}{l} |R|\, e^{-\operatorname{Im}\phi} > \max |e^{i\beta}\gamma \cosh(\varsigma + i\tau) \pm c_0| \\ |R|\, e^{\operatorname{Im}\phi} > \max |e^{-i\beta}\gamma \cosh(\varsigma - i\tau) \pm c_0| \end{array} \right\}$$

bzw. in

$$\mathcal{L}_i = \left\{ (R,\phi) \,\middle|\, \begin{array}{l} |R|\, e^{-\operatorname{Im}\phi} < \min |e^{i\beta}\gamma \cosh(\varsigma + i\tau) \pm c_0| \\ |R|\, e^{\operatorname{Im}\phi} < \min |e^{-i\beta}\gamma \cosh(\varsigma - i\tau) \pm c_0| \end{array} \right\}$$

holomorphen Lösungen z_0, t_0 bzw. $\hat{z}_0, \hat{t}_0$ von

(6.1) $c_0\cosh(z_0 \pm i t_0) = R\, e^{\pm i\phi} + e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\zeta\pm i\tau)$

das Theorem, falls $\hat{h}^2$ normaler Wert zu 0 und 1 ist,

$$M_\nu^{(j)}(z_0(R,\phi);h_0)\, me_\nu(t_0(R,\phi);h_0^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, \mathcal{Z}_{\nu+n}^{(j)}(kR)\, e^{i(\nu+n)\phi}$$

mit

$$D_n=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{i^{m+n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} me_m(-t+\beta;\hat{h}^2)\, me_\nu(t;h_0^2)\, e^{-i(\nu+n)t}\,dt\; M_m^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_m(\tau;\hat{h}^2)$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l\Big\{\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{2p-2l}^{2l-n}(\hat{h}^2)\, e^{i(2p-n)\beta}\, c_{2p}^{\nu}(h_0^2)\Big\}\, M_{2l-n}^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_{2l-n}(\tau;\hat{h}^2)$$

bzw. in $\mathcal{L}_i$, falls $\hat{h}^2$ normaler Wert zu ν und $\nu+1$ ist

und $\Re(\zeta \pm i\tau) > 0$

(6.2) $\min_{\varphi\in[0,2\pi]}\{|e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\zeta\pm i\tau+i\varphi)|\}>|c_0|$

(nach (5.3)) erfüllt ist,

$$M_\nu^{(j)}(\hat{z}_0(R,\phi);h_0)\, me_\nu(\hat{t}_0(R,\phi);h_0^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n^{(j)}\, J_n(kR)\, e^{in\phi}$$

mit

$$\hat{D}_n^{(j)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{i^{m+n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} me_{\nu+m}(-t+\beta;\hat{h}^2)\, me_\nu(t;h_0^2)\, e^{-int}\,dt\; M_{\nu+m}^{(j)}(\zeta;\hat{h})\, me_{\nu+m}(\tau;\hat{h}^2).$$

Läßt man dagegen die (z_0,t_0)-Koordinaten mit

$$c_0 \longrightarrow 0\ ,\ 2\,h_0\cosh z_0 \longrightarrow kR_0\ ,\ t_0 \longrightarrow \phi_0$$

$$R\, e^{\pm i\phi_0} = c_0\cosh(z_0 \pm i t_0)$$

zu Polarkoordinaten ausarten, wobei ohne Einschränkung $\alpha = 0$ gesetzt werden kann, dann gilt für die Lösung (R_0, ϕ_0) von

(6.3) $R_0 e^{\pm i\phi_0} = c\cosh(z\pm it) + e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\zeta\pm i\tau)$

in $\mathcal{L}_a = \{ (z,t) \mid \Re z \mp \Im t > A^{\pm} \}$ (vgl. (3.2))

für zu 0 und 1 normale $\hat{h}^2$ und zu ν und $\nu+1$ normale h^2

$$\mathcal{Z}_\nu^{(j)}(kR_0(z,t))\, e^{i\nu\phi_0(z,t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{mn}\, M_m^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_m(\tau;\hat{h}^2)\Big\}\times M_{\nu+n}^{(j)}(z;h)\, me_{\nu+n}(t;h^2)$$

mit

$$K_{mn}(0,h^2;\beta,\hat{h}^2) = \frac{i^{m+n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} me_m(-t+\beta;\hat{h}^2)\, e^{i\nu t}\, me_{\nu+n}(-t;h^2)\,dt$$

$$=\begin{cases}(-1)^l \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{2p-2l}^{2l-n}(\hat{h}^2)\, e^{i(2p-n)\beta}\, c_{-2p}^{\nu+n}(h^2) & (m+n=2l)\\ 0 & m+n \ \text{ungerade}\end{cases}\quad .$$

Im Falle ganzer ν und $A^+ \neq A^-$ müssen die Reihenglieder mit den Indizes $\nu+n$ und $-\nu-n$ zusammengefaßt werden(vgl.(5.2)).

Mit der Voraussetzung (nach (5.3)) $\Re(\zeta\pm i\tau) > 0$ und

(6.4) $\min_{\varphi\in[0,2\pi]}\Big\{\min_{\sigma\in[-1,1]} |e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\zeta\pm i\tau+i\varphi) - c\,\sigma|\Big\} > 0$

erhält man für zu ν und $\nu+1$ normale $\hat{h}^2$ und zu 0 und 1 normale h^2 in $\mathcal{L}_i = \{ (z,t) \mid |\Re z \mp \Im t| < A^{\pm} \}$ (vgl.(3.2))

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_\nu^{(j)}(kR_0(z,t))\, e^{i\nu\phi_0(z,t)} &= \Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{m0}\, M_{\nu+m}^{(j)}(\zeta;\hat{h})\, me_{\nu+m}(\tau;\hat{h}^2)\Big\}\, M_0^{(1)}(z;h)\, me_0(t;h^2) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{mn}\, M_{\nu+m}^{(j)}(\zeta;\hat{h})\, me_{\nu+m}(\tau;\hat{h}^2)\Big\}\, M_n^{(1)}(z;h)\, me_n(t;h^2) + \\ &+ \Big\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{m\,-n}\, M_{\nu+m}^{(j)}(\zeta;\hat{h})\, me_{\nu+m}(\tau;\hat{h}^2)\Big\}\, M_{-n}^{(1)}(z;h)\, me_{-n}(t;h^2)\Big]\end{aligned}$$

mit

$$L_{mn} = K_{nm} = \frac{i^{m+n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} me_{\nu+m}(-t+\beta;\hat{h}^2)\, e^{i\nu t}\, me_n(-t;h^2)\,dt \quad . -$$

Lassen wir beide Systeme ausarten, so entsteht mit $\alpha = \beta = 0$ die Transformationsgleichung

(6.5) $R_0 e^{\pm i\phi_0} = R\, e^{\pm i\phi} + \gamma\cosh(\zeta \pm i\tau)$.

In $\mathfrak{L}_a = \{(R,\phi) \mid |R| e^{\mp \Im \phi} > |\gamma \cosh(\zeta \pm i\tau)|\}$ wird (6.5) durch die beiden holomorphen Funktionen

$$R_o(R,\phi) = R\left(1 + \frac{e^{i\phi}}{R}\gamma\cosh(\zeta - i\tau)\right)^{1/2}\left(1 + \frac{e^{-i\phi}}{R}\gamma\cosh(\zeta + i\tau)\right)^{1/2}$$

und

$$\Phi_o(R,\phi) = \phi + \frac{1}{2i}\log\frac{R + e^{-i\phi}\gamma\cosh(\zeta + i\tau)}{R + e^{i\phi}\gamma\cosh(\zeta - i\tau)}$$

aufgelöst, wobei wir für log und beide $(\;)^{1/2}$ die Hauptwerte verabreden. Dann gilt für zu 0 und 1 normale Werte $\hat{h}^2$ die Entwicklung

$$\mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(kR_o(R,\phi))\, e^{i\nu\Phi_o(R,\phi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l c_{-2l}^{2l-n}(\hat{h}^2)\, M_{2l-n}^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_{2l-n}(\tau;\hat{h}^2)\right\}\cdot \mathfrak{Z}_{\nu+n}^{(j)}(kR)\, e^{i(\nu+n)\phi}.$$

Im Falle $\tau = 0$ liefert der Vergleich mit dem Additionstheorem der Zylinderfunktionen

$$\mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(kR_o(R,\phi))\, e^{i\nu\Phi_o(R,\phi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{-n}(2\hat{h}\cosh\zeta)\, \mathfrak{Z}_{\nu+n}^{(j)}(kR)\, e^{i(\nu+n)\phi}$$

die für alle ζ konvergente und zu n normale Werte $\hat{h}^2$ gültige Reihe

$$J_n(2\hat{h}\cosh\zeta) = \sum_{2l+n\geq 0}(-1)^l c_{-2l}^{n+2l}(\hat{h}^2)\, M_{n+2l}^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_{n+2l}(0;\hat{h}^2),$$

da $me_m(0;\hat{h}^2) = 0$ für $m = -1, -2, -3, \ldots$ gilt.

Substituiert man $\hat{h} \longrightarrow \hat{h}e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\zeta \longrightarrow \zeta - i\frac{\pi}{2}$

oder setzt man $\tau = \phi = \frac{\pi}{2}$ ($\curvearrowright \Phi_o = \frac{\pi}{2}$), so entsteht die Formel

$$J_n(2\hat{h}\sinh\zeta) = e^{-i\frac{\pi}{2}n}\sum_{2l+n\leq 0}(-1)^l c_{-2l}^{2l+n}(\hat{h}^2)\, M_{n+2l}^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_{n+2l}(\tfrac{\pi}{2};\hat{h}^2),$$

da $me_m(\frac{\pi}{2};\hat{h}^2) = 0$ für $m = 1, 2, 3, \ldots$ ist.

In $\mathfrak{L}_i = \{(R,\phi) \mid |R| e^{\mp \Im \phi} < |\gamma\cosh(\zeta \pm i\tau)|\}$ wird mit $\mathfrak{Re}(\zeta \pm i\tau) > 0$ (6.5) durch

$$\hat{R}_o(R,\phi) = \gamma\sqrt{\cosh^2\zeta - \sin^2\tau}\left(1 + \frac{R\, e^{i\phi}}{\gamma\cosh(\zeta + i\tau)}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{R\, e^{-i\phi}}{\gamma\cosh(\zeta - i\tau)}\right)^{1/2}$$

und

$$\hat{\Phi}_o(R,\phi) = \frac{1}{2i}\log\frac{\cosh(\zeta + i\tau)}{\cosh(\zeta - i\tau)} + \frac{1}{2i}\,\mathrm{Log}\,\frac{1 + \dfrac{R\cdot e^{i\phi}}{\gamma\cosh(\zeta + i\tau)}}{1 + \dfrac{R\cdot e^{-i\phi}}{\gamma\cosh(\zeta - i\tau)}}$$

aufgelöst, wobei $(\;)^{1/2}$ und Log die Hauptwerte bedeuten. $\sqrt{\;}$ und log seien die analytischen Funktionen, die für $\mathfrak{Re}\,\zeta \longrightarrow \infty$ bei $|\Im\tau| \leqq$ const. $k\hat{R}_o \longrightarrow 2\hat{h}\cosh\zeta$ und $\hat{\Phi}_o \longrightarrow \tau$ erfüllen und die für reelle Werte ζ, τ mit $\zeta > 0$, $\tau \in (-\pi, \pi)$ die Hauptwerte liefern. Für zu ν und $\nu+1$ normale $\hat{h}^2$ gilt dann

$$(6.6)\quad \mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(k\hat{R}_o(R,\phi))\, e^{i\nu\hat{\Phi}_o(R,\phi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l c_{-2l}^{\nu+2l-n}(\hat{h}^2)\, M_{\nu+2l-n}^{(j)}(\zeta;\hat{h})\, me_{\nu+2l-n}(\tau;\hat{h}^2)\right\}J_n(kR)\, e^{in\phi}.$$

Speziell erhält man mit $\tau = 0$, $\phi = 0$, $R = 0$ $\hat{\Phi}_o = 0$ und $k\hat{R}_o = 2\hat{h}\cosh\zeta$ und damit in $\mathfrak{Re}\,\zeta > 0$ für zu ν normale Werte $\hat{h}^2$

$$\mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(2\hat{h}\cosh\zeta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l c_{-2l}^{\nu+2l}(\hat{h}^2)\, M_{\nu+2l}^{(j)}(\zeta;\hat{h})\, me_{\nu+2l}(0;\hat{h}^2)$$

und mit der Substitution $\hat{h} \longrightarrow \hat{h}e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\zeta \longrightarrow \zeta - i\frac{\pi}{2}$ (oder $\tau = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$, $R = 0$ $\curvearrowright \hat{\Phi}_o = \frac{\pi}{2}$, $k\hat{R}_o = 2\hat{h}\sinh\zeta$)

$$\mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(2\hat{h}\sinh\zeta) = e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l c_{-2l}^{\nu+2l}(\hat{h}^2)\, M_{\nu+2l}^{(j)}(\zeta;\hat{h})\, me_{\nu+2l}(\tfrac{\pi}{2};\hat{h}^2).$$

Differenziert man für $R = \phi = 0$ (6.6) nach τ an der Stelle $\tau = 0$, so erhält man mit

$$\frac{d}{d\tau}\hat{R}_0\Big|_{\tau=0} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{d\tau}e^{i\nu\hat{\phi}_0}\Big|_{\tau=0} = i\,\nu \tanh \zeta$$

noch die ebenfalls für $\Re_\zeta > 0$ konvergenten Reihen

$$\nu \cdot \mathcal{Z}_\nu^{(j)}(2\hat{h}\cosh\zeta) = -i \coth\zeta \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l c_{-2l}^{\nu+2l}(\hat{h}^2) M_{\nu+2l}^{(j)}(\zeta;\hat{h}) me'_{\nu+2l}(0;\hat{h}^2)$$

und mit $\hat{h} \longrightarrow \hat{h}e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\zeta \longrightarrow \zeta - i\frac{\pi}{2}$

$$\nu \cdot \mathcal{Z}_\nu^{(j)}(2\hat{h}\sinh\zeta) = -i \tanh\zeta \, e^{-i\nu\frac{\pi}{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l c_{-2l}^{\nu+2l}(\hat{h}^2) M_{\nu+2l}^{(j)}(\zeta;\hat{h}) me'_{\nu+2l}(\tfrac{\pi}{2};\hat{h}^2).$$

Literatur

[1] Meixner, J. u. F.W. Schäfke: Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Berlin-Göttingen-Heidelberg (1954).

[2] Schäfke, F.W.: Das Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen. Math.Z. 58, 436-447 (1953).

[3] Schäfke, F.W.: Einführung in die Theorie der speziellen Funktionen der Mathematischen Physik. Berlin-Göttingen-Heidelberg (1963).

[4] Schäfke, F.W.: Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen. I. Math.Z. 74, 436-470 (1960).
- II. Math.Z. 75, 154-191 (1961).
- III. Math.Z. 80, 400-442 (1963).

[5] Saermark, K.: A Note on Additions Theorems for Mathieu Functions. Z.f. angew. Math. u. Phys. (ZAMP) 10, 426-428 (1959).

[6] Wolf, G.: Ein Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen. Diplomarbeit Köln (1968).

Lebenslauf

Am 9. Februar 1942 wurde ich als Sohn des Bundesbahnamtmanns Anton Wolf und seiner Ehefrau Luise, geborene Denz, in Wuppertal-Elberfeld geboren.

Von April 1948 bis Ostern 1952 besuchte ich die Volksschule und anschließend das Städtische Naturwissenschaftliche Gymnasium in Wuppertal-Vohwinkel, wo ich im Frühjahr 1961 die Reifeprüfung bestand.

Zum Sommer-Semester 1961 ließ ich mich in der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität zu Köln immatrikulieren und begann das Studium der Mathematik und Physik. Die Diplomvorprüfung in Mathematik legte ich im Winter-Semester 1964/65 ab. Danach fertigte ich unter Anleitung von Prof. Dr. F. W. Schäfke eine Diplomarbeit über das Thema "Ein Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen" an und bestand im Mai 1968 die Diplomhauptprüfung.

Von Herbst 1965 bis Frühjahr 1967 war ich studentische Hilfskraft zunächst bei Prof. Dr. Schönhage, dann bei Prof. Dr. F. W. Schäfke. Seit Herbst 1968 habe ich eine Stelle als Tutor am Mathematischen Institut der Universität zu Köln innerhalb eines Programms für die Anfängervorlesungen.

Die vorliegende Dissertation wurde von Prof. Dr. F. W. Schäfke angeregt und gefördert. Hierfür möchte ich ihm an dieser Stelle herzlich danken.

Gerhard Wolf

Druck: Walter Kleikamp, 5 Köln-Sülz, Zülpicher Straße 205, Ruf 44 23 72